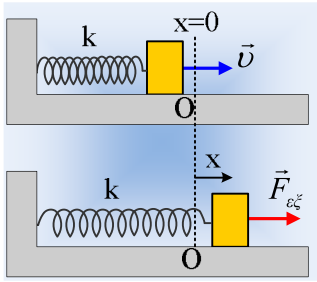
Μια απλή αρμονική ταλάντωση και μια εξαναγκασμένη



Ένα σώμα μάζας 0,5kg είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=18N/m κι εκτελεί ΑΑΤ με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,2·ημ(ωt) (μονάδες στο S.I.) σε λείο οριζόντιο επίπεδο, γύρω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου Ο.

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις της κινητικής, της δυναμικής και της ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο και να παρασταθούν γραφικά στους ίδιους άξονες.

ii) Το ίδιο σύστημα τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης, ενώ ταυτόχρονα δέχεται από το περιβάλλον του και δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi}$=-bυ. Μετά την αποκατάσταση σταθερού πλάτους ταλάντωσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας Ο, λαμβάνοντας κάποια στιγμή ως αρχή μέτρησης του χρόνου, έχουμε την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας Ο, να υπακούει στην εξίσωση x=0,2·ημ(5t) (S.I.).

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις υ=υ(t) και α=α(t) της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο και να παρασταθούν γραφικά στους ίδιους άξονες.

γ) Το άθροισμα K+U των δύο παραπάνω ενεργειών παραμένει σταθερό στη διάρκεια της ταλάντωσης; Να σχολιάστε το συμπέρασμα που καταλήγετε παράλληλα με την πρόταση ότι «στη διάρκεια της εξαναγκασμένης ταλάντωσης η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα (μέσω της εξωτερικής δύναμης) αντισταθμίζει τις απώλειες (που οφείλονται στις δυνάμεις απόσβεσης) και έτσι το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό».

Απάντηση:

i) Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{18}{0,5}} rad/s = 6 rad/s$$

Αλλά τότε η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι:

$$\upsilon = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) = 1,2 \cdot \sigma\upsilon\nu(6t) \text{ (S.I.)}$$

Και το σώμα έχει κινητική ενέργεια που μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση:

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 1,2^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(6t) = 0,36 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(6t) \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική της δε παράσταση είναι η κόκκινη γραμμή στο παρακάτω διάγραμμα.

Εξάλλου η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης, ίση με τη δυναμική ενέργεια ελαστικότητας του ελατηρίου, δίνεται από την εξίσωση:

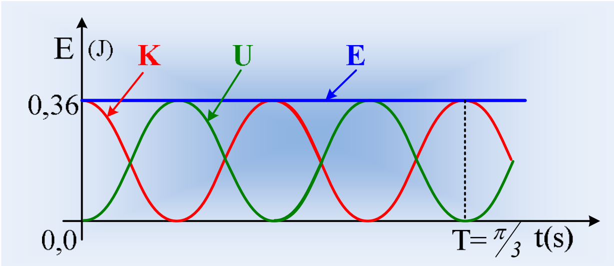
$$U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}18\cdot 0{,}2^2\cdot \eta\mu^2(6t)=0{,}36\cdot \eta\mu^2(6t)\quad \text{(S.I.)}$$

Όπου στο σχήμα παριστάνεται με την πράσινη γραμμή.

Παίρνοντας το άθροισμα των δύο αυτών ενεργειών έχουμε:

$$K+U=0{,}36\cdot \sigma\upsilon\nu^2(6t)+0{,}36\cdot \eta\mu^2(6t)=0{,}36\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2(6t)+\eta\mu^2(6t)\right)=0{,}36J=E_\tau$$

Βρίσκουμε δηλαδή ένα άθροισμα το οποίο παραμένει σταθερό και ανεξάρτητο του χρόνου, το «βαφτίζουμε» ***ενέργεια ταλάντωσης (E_τ)*** και η γραφική της παράσταση είναι η μπλε γραμμή στο διάγραμμα.



ii) Τώρα έχουμε μια ***αρμονική εξαναγκασμένη ταλάντωση*** με εξίσωση απομάκρυνσης x=0,2·ημ(5t).

α) Με βάση την εξίσωση x=x(t) έχουμε για την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος:

$$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu(5t)=1\cdot\sigma\upsilon\nu(5t)\quad \text{(S.I.) και}$$

$$\alpha=-\omega^2A\cdot\eta\mu(5t)=-5^2\cdot 0{,}2\cdot\eta\mu(5t)=-5\cdot\eta\mu(5t)\quad \text{(S.I.)}$$

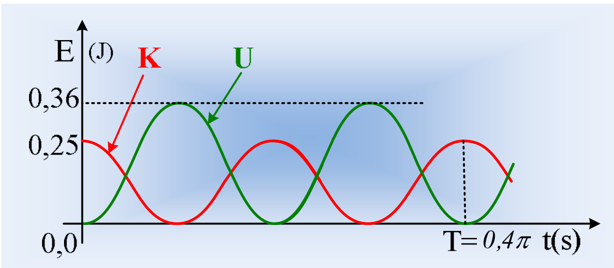
β) Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}0{,}5\cdot 1^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2(5t)=0{,}25\cdot\sigma\upsilon\nu^2(5t)\quad \text{(S.I.)}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι αυτή που συνδέεται με την δύναμη επαναφοράς, που στην περίπτωσή μας δεν είναι άλλη από τη δύναμη του ελατηρίου, άρα στην πραγματικότητα μιλάμε για την ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, για την οποία έχουμε:

$$U=U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}18\cdot 0{,}2^2\cdot\eta\mu^2(5t)=0{,}36\cdot\eta\mu^2(5t)\quad \text{(S.I.)}$$

Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, είναι όπως στο σχήμα:



γ) Από το παραπάνω διάγραμμα γίνεται φανερό ότι το άθροισμα K+U δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται από στιγμή σε στιγμή. Αρκεί να σκεφτούμε ότι τη στιγμή t=0, είναι ίσο με 0,25J, ενώ τη στιγμή t_1= ¼ Τ έχει γίνει ίσο με 0,36J, για να πάρει τιμή ξανά 0,25J, μόλις το σώμα ξαναπερνά από τη θέση ισορροπίας του τη στιγμή t_2= ½ Τ. Αλλά αυτό σημαίνει ότι **ΔΕΝ έχει νόημα** να μιλήσουμε για ενέργεια ταλάντωσης, αφού δεν παραμένει σταθερή και αυξομειώνεται στη διάρκεια της ταλάντωσης. Έτσι η πρόταση που μας δόθηκε ότι: «στη διάρκεια της εξαναγκασμένης ταλάντωσης η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα (μέσω της εξωτερικής δύναμης) αντισταθμίζει τις απώλειες (που οφείλονται στις δυνάμεις απόσβεσης) και έτσι το πλάτος της ταλάντωσης διατηρείται σταθερό» είναι σωστή αν αναφερόμαστε σε χρόνο μια περιόδου. Πράγματι αν προσέξουμε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, θα δούμε ότι παρουσιάζει μέγιστη τιμή U_{max}=0,36J, κάθε φορά που το σώμα φτάνει σε θέση πλάτους. Έχουμε λοιπόν σταθερό πλάτος ταλάντωσης, με την έννοια της ίδιας μέγιστης απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, αλλά στη διάρκεια της περιόδου, υπάρχουν χρονικά διαστήματα που η εξωτερική δύναμη μεταφέρει στο σώμα μεγαλύτερη ενέργεια από αυτήν που αφαιρεί η δύναμη απόσβεσης, με αποτέλεσμα το άθροισμα K+U να αυξάνεται και υπάρχουν και άλλα χρονικά διαστήματα που συμβαίνει το αντίστροφο, οπότε το άθροισμα K+U μειώνεται.

dmargaris@gmail.com