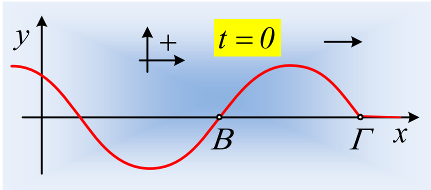
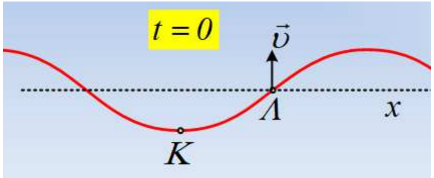
Φάσεις και διαφορές φάσεων σε ένα κύμα.





Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα κύμα και στο πρώτο σχήμα βλέπετε τη μορφή του μέσου τη στιγμή t=0. Αν το σημείο Γ, στο οποίο φτάνει το κύμα τη στιγμή αυτή, απέχει 0,8m από το σημείο Β και αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης την:

$$y_Γ=0,2·ημ4πt \quad \text{(S.I.)}$$

i) Να υπολογιστούν η συχνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

ii) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης *(y=f(t))* για το σημείο Β και να γίνει η γραφική της παράσταση μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=0,75s.

iii) Να βρεθεί η εξίσωση της φάσης της απομάκρυνσης του σημείου Β σε συνάρτηση με το χρόνο και:

α) Να παρασταθεί γραφικά μέχρι τη στιγμή t_1.

β) Να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Β και Γ.

iv) Σε μια άλλη περίπτωση, κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα και στο δεύτερο σχήμα, βλέπετε τη μορφή μιας περιοχής του μέσου, κάποια στιγμή που πήραμε ως t=0. Τη στιγμή αυτή το σημείο Κ βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης, ενώ το σημείο Λ έχει ταχύτητα ταλάντωσης, όπως στο σχήμα.

α) Αν η οριζόντια απόσταση των δύο σημείων είναι Δx=0,7m, να βρεθεί η συχνότητα του δεύτερου κύματος.

β) Αν κάποια στιγμή t_2 το σημείο Κ έχει φάση απομάκρυνσης 12π (rad) ποια θα είναι η αντίστοιχη φάση του σημείου Λ;

Απάντηση:

i) Με βάση την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Γ ($y_Γ$=0,2·ημ4πt) προκύπτει ότι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης των σημείων του μέσου, είναι ω=4π rad/s. Οπότε:

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} Hz = 2Hz$$

Αλλά η συχνότητα της ταλάντωσης κάθε σημείου, είναι και η συχνότητα του κύματος, συνεπώς *f=2Hz*.

Εξάλλου με βάση το σχήμα η απόσταση (ΒΓ)= ½ λ, όπου λ το μήκος του κύματος. Έτσι έχουμε:

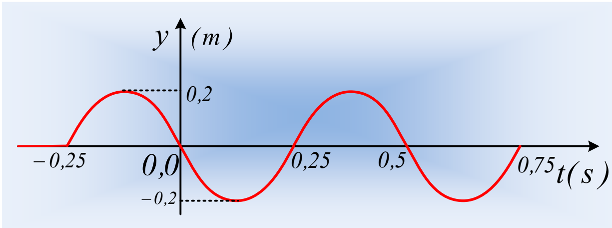
$$λ=2(ΒΓ)=1,6m \text{ και}$$

$$υ=λf=1,6·2m/s=3,2m/s.$$

ii) Το σημείο Β ταλαντώνεται με τον ίδιο τρόπο που ταλαντώνεται και το σημείο Γ, με τη διαφορά ότι ξεκίνησε την ταλάντωσή του νωρίτερα σε σχέση με το Γ. Πόσο νωρίτερα; Όσο χρόνο χρειάστηκε το κύμα για να διαδοθεί από το Β στο Γ. Αλλά αφού η απόσταση μεταξύ τους είναι μισό μήκος κύματος, ο αντίστοιχος χρόνος είναι t΄= ½ Τ = ½ · ½ s=0,25s, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του γράφεται:

$$y_B=0,2\cdot\eta\mu 4\pi(t+t') = 0,2\cdot\eta\mu 4\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)=0,2\cdot\eta\mu\left(4\pi t+\pi\right)\ \ t\geq -0,25\text{s}\ \ (\text{S.I.})$$

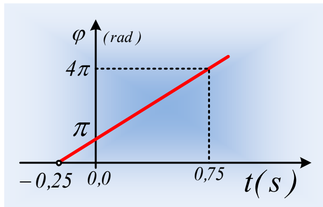
Με γραφική παράσταση:



iii) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Β παίρνουμε:

$$\varphi_B = 4\pi t + \pi \ \text{ με }\ t\geq -0,25\text{s} \quad (\text{S.I.})$$

α) Προφανώς η φάση έχει νόημα από τη στιγμή που το σημείο Β τίθεται σε ταλάντωση, οπότε η γραφική παράσταση, με βάση την παραπάνω εξίσωση, έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



β) Με βάση τις εξισώσεις των δύο φάσεων για τα σημεία Β και Γ έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_\Gamma = \left(4\pi t+\pi\right) - 4\pi t = \pi \ \ \text{rad}$$

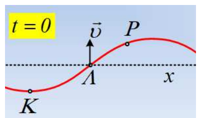
iv) Έχουμε το ίδιο ελαστικό μέσο, οπότε και την ίδια ταχύτητα κύματος υ=3,2m/s και αυτό ανεξάρτητα της συχνότητας ή του πλάτους του δεύτερου κύματος.

α) Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σημείων Κ και Λ είναι ίση με ¼ λ΄, αφού το ένα είναι σε θέση πλάτους και το άλλο περνά από τη θέση ισορροπίας του, οπότε:

λ΄=4·Δx=4·0,7m=2,8m και

$$\upsilon = \lambda' f' \rightarrow f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{3,2}{2,8}Hz = \frac{8}{7}Hz$$

β) Το σημείο Λ έχει ταχύτητα προς τα πάνω, συνεπώς μετά από λίγο θα έχει απομάκρυνση θετική, θα βρεθεί δηλαδή σε θέση που τώρα (για t=0), βρίσκεται ένα σημείο Ρ, στα δεξιά του. Πράγμα που σημαίνει ότι και κάθε σημείο του μέσου, ακολουθεί ένα σημείο στα δεξιά του, από όπου συμπεραίνουμε ότι το 2ο κύμα διαδίδεται προς τα αριστερά. Αλλά τότε πρώτα το κύμα έφτασε στο Λ και αργότερα στο σημείο Κ, το οποίο καθυστέρησε κατά χρονικό διάστημα ίσο με το ¼ της περιόδου (αφού Δx= ¼ λ) για να ταλαντωθεί. Συνεπώς κάθε στιγμή μεγαλύτερη φάση θα έχει το σημείο Λ, αφού αυτό έχει ταλαντωθεί περισσότερο χρόνο με αποτέλεσμα η φάση του να προηγείται κατά:



$$\Delta\varphi = \omega \cdot \frac{1}{4}T' = \frac{2\pi}{T'} \cdot \frac{1}{4}T' = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Έχουμε δηλαδή:

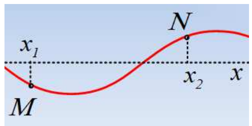
$$\Delta\varphi = \varphi_{\Lambda} - \varphi_{K} = \frac{\pi}{2}$$

Οπότε παίρνουμε:

$$\varphi_{\Lambda} = \varphi_{K} + \frac{\pi}{2} = 12{,}5\pi \text{ rad}$$

Σχόλιο:

Η διαφορά φάσης (της απομάκρυνσης) μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου, στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα, εξαρτάται από την μεταξύ τους απόσταση Δx και το μήκος κύματος.



Πράγματι έστω ότι έχουμε δύο σημεία Μ και Ν στις θέσεις x_1 και x_2.

Για ένα κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά, με εξίσωση κύματος

$$y = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

Έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = \left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + \varphi_0\right) - \left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_2}{\lambda} + \varphi_0\right) \rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$

Αλλά και για ένα κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, με εξίσωση κύματος

$$y = A \cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi_0\right)$$

Θα έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = \left(2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + \varphi_0\right) - \left(2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_2}{\lambda} + \varphi_0\right) \rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = 2\pi\frac{x_1 - x_2}{\lambda}$$

Βέβαια στην δεύτερη περίπτωση αφού $x_1 < x_2$, θα βρούμε και $\Delta\varphi < 0$, πράγμα που σημαίνει ότι στην πραγματικότητα η **διαφορά φάσης** (μεταξύ των σημείων) πρέπει να γραφτεί:

$$\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_M = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} > 0$$

Διαφορετικά θα πρέπει να ζητηθεί η διαφορά φάσης $\Delta\varphi=\varphi_M-\varphi_N$…

dmargaris@gmail.com