Συμβολή δύο ομοίων κυμάτων.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς τη θετική κατεύθυνση) διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος Α=0,2m και την ίδια συχνότητα f=1Hz. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι ίση με υ=2m/s. Σε ένα σημείο Ο, το οποίο θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων (x=0), το πρώτο κύμα φτάνει κατά τη χρονική στιγμή t=0 και το δεύτερο κύμα κατά τη χρονική στιγμή t_1=1,25s. Θεωρείστε ότι εξαιτίας κάθε κύματος το σημείο Ο αρχίζει να κινείται προς την θετική φορά (προς τα πάνω).

i) Να γραφεί η εξίσωση του πρώτου κύματος και να σχεδιάστε το στιγμιότυπό του τη στιγμή t_1 και για τα σημεία του θετικού ημιάξονα x.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος για το δεύτερο κύμα.

iii) Να βρεθεί το αποτέλεσμα της συμβολής των δύο παραπάνω κυμάτων και να υπολογιστεί η απομάκρυνση ενός σημείου P, στη θέση x=1m τη χρονική στιγμή t_2=2,5s.

iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση y=f(x) της απομάκρυνσης των διαφόρων σημείων του μέσου και για τα σημεία του θετικού ημιάξονα, τη χρονική στιγμή t_2.

Απάντηση:

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε $υ=λf \rightarrow λ=υ/f= 2$m

i) Η εξίσωση του πρώτου κύματος που φτάνει τη στιγμή t=0 στη θέση x=0, θα είναι:

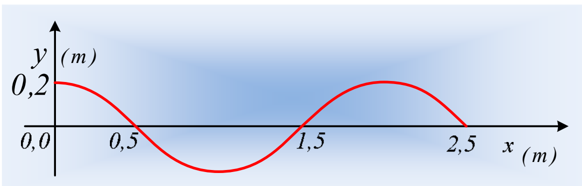
$$y_1 = A\cdot ημ2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = 0,2\cdot ημ2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right) \quad (1) \text{ με } t\geq 0 \text{ και } x\leq 2t \text{ (S.I.)}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση $t=t_1$=1,25s παίρνουμε:

$$y_1 = 0,2\cdot ημ2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right) = 0,2\cdot ημ2\pi\left(1,25-\frac{x}{2}\right) = 0,2\cdot ημ\left(2,5\pi-2\pi\frac{x}{2}\right)\rightarrow$$

$$y_1 = 0,2\cdot ημ\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\pi x\right) = 0,2\cdot συν(\pi x) \quad \text{με } x\leq υ\cdot t_1$$

Όπου το κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση $x_1=υt_1$=2,5m. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2) είναι το στιγμιότυπο και έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



ii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο εξαιτίας του δεύτερου κύματος θα είναι $y=A\cdot ημω(t-t_1)$ ή

$$y = 0,2\cdot ημ2\pi(t-1,25)$$

συνεπώς η εξίσωση του δεύτερου κύματος θα είναι της μορφής:

$$y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda} - 1{,}25\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} - 1{,}25\right)$$ (2) με $t \geq 1{,}25s$ και $x \leq 2t-2{,}5$ (S.I.)

iii) Όταν το δεύτερο κύμα φτάνει στη θέση x=0, συμβάλει με το πρώτο κύμα, το οποίο έχει διαδοθεί στον θετικό ημιάξονα (στην πραγματικότητα συμβολή έχουμε και πριν στον αρνητικό ημιάξονα, απλά δεν μας ενδιαφέρει) και από την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2}\right) + 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} - 1{,}25\right) \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1{,}25}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t - \frac{x}{2} + t - \frac{x}{2} - 1{,}25}{2} = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}\right) \text{ ή}$$

$$y = -0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}\right) \text{ ή και}$$

$$y = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \pi x - \frac{\pi}{4}\right)$$ (3) με $t \geq 1{,}25s$ και $x \leq 2t-2{,}5$ (S.I.)

Αξίζει να τονισθεί ότι η παραπάνω εξίσωση (3) περιγράφει ένα (τρέχον) κύμα με πλάτος $A = 0{,}2\sqrt{2}m$.

Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση x=1m και t_2=2,5s παίρνουμε:

$$y = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 2{,}5 - \pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -0{,}2m$$

iv) Τη στιγμή t_2 το κύμα (3) καλύπτει μια περιοχή (στο θετικό ημιάξονα) από x=0 έως κάποιο σημείο P, όπου έχει διαδοθεί σε χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1 = 1{,}25s$ δηλαδή μέχρι τη θέση $x_2 = \upsilon \cdot \Delta t = 2{,}5m$

Αντίθετα το πρώτο κύμα έχει φτάσει στη $x_{2,1} = \upsilon \cdot t_2 = 5m$.

Έτσι με αντικατάσταση στην (3), t=2,5s, βρίσκουμε για την περιοχή $0 \leq x \leq 2{,}5m$:

$$y = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi \cdot 2{,}5 - \pi x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

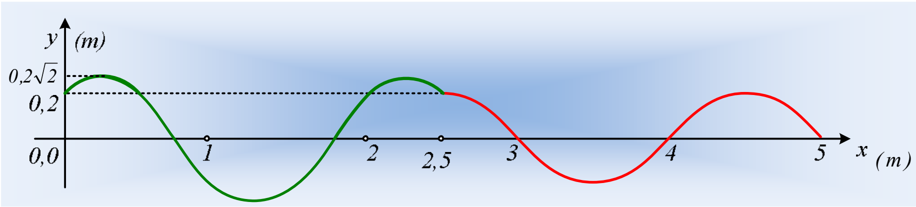
$$y = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(5\pi - \pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ενώ με αντικατάσταση στην (1) t=2,5s παίρνουμε για την περιοχή $2{,}5m \leq x \leq 5m$:

$$y_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi(5\pi - \pi x) \rightarrow$$

$$y_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(\pi x)$$

Με βάση αυτά η μορφή του μέσου, είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

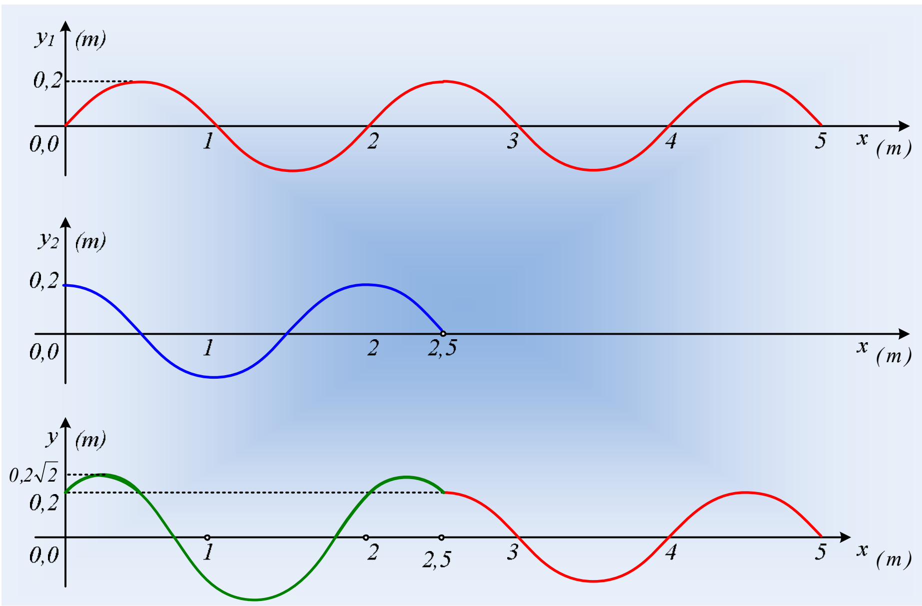


Όπου με πράσινο χρώμα είναι το κύμα μετά την συμβολή ενώ με κόκκινο είναι το (1) σχήμα.

Σχόλια:

1) Η εξίσωση (3) $y = 0{,}2\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(2\pi t - \pi x - \frac{\pi}{4}\right)$ είναι εξίσωση ενός τρέχοντος κύματος. Η συμβολή δηλαδή δύο κυμάτων που διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση, είναι ένα νέο τρέχον κύμα. Δείτε το αυτό σε αντιδιαστολή με την περίπτωση που τα δύο κύματα διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις, οπότε προκύπτει στάσιμο κύμα.
2) Θα μπορούσε να δοθεί και μια δεύτερη «πρακτική» λύση στην παρουσίαση των στιγμιοτύπων. Ας την δούμε:

Με βάση την αρχή της επαλληλίας, το κάθε κύμα διαδίδεται ανεξάρτητα του άλλου και επειδή οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται προς την θετική κατεύθυνση, κάθε σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα, αρχίζει επίσης να ταλαντώνονται προς τα πάνω και έτσι δημιουργείται «όρος». Το πρώτο τη στιγμή t_2 έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση x=υt=5m, ενώ το μήκος κύματος είναι 2m. Αντίστοιχα το δεύτερο κύμα έχει διαδοθεί μέχρι τη θέση x_2=υ(t-1,25s)=2,5m. Έτσι σχεδιάζουμε τα δύο ανεξάρτητα κύματα και με πρόσθεση των αντίστοιχων απομακρύνσεων παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο σχήμα:



dmargaris@gmail.com