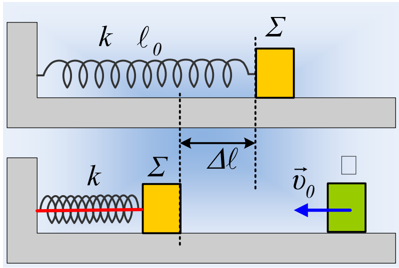
Με την κρούση, κόβουμε και το νήμα



Ένα σώμα Σ μάζας m=4kg ηρεμεί δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=40N/m, σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μετακινούμε το σώμα προς τα αριστερά συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά Δl και στη θέση αυτή το δένουμε με το νήμα, όπως στο κάτω σχήμα.

Ένα δεύτερο σώμα Β της ίδιας μάζας m κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με διεύθυνση τον άξονα του ελατηρίου, με σταθερή ταχύτητα υ_0=1m/s. Τα δυο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη στιγμή t_0=0. Τη στιγμή της κρούσης, με ένα ψαλίδι, κόβουμε ταυτόχρονα και το νήμα που συγκρατούσε το σώμα Σ. Μετά την κρούση το Σ κινείται προς τα αριστερά μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του τη στιγμή t_1=1/3s.

i) Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση τους.

ii) Να βρεθεί η μεταβολή της φάσης της απομάκρυνσης του σώματος Σ, από την στιγμή της κρούσης έως τη στιγμή t_1.

iii) Να βρεθεί η αρχική συσπείρωση Δl του ελατηρίου.

iv) Αν τα δυο σώματα συγκρούονται ξανά κεντρικά και ελαστικά τη στιγμή t_2, ζητούνται:

α) Η απόσταση των δύο σωμάτων, όταν το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό μήκος του, για πρώτη φορά.

β) Πόσο καθυστέρησε η απόκτηση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, εξαιτίας της δεύτερης κρούσης μεταξύ των σωμάτων;

γ) Θεωρώντας τη θέση φυσικού μήκος του ελατηρίου, ως αρχή ενός οριζόντιου άξονα x, με θετική φορά προς τα δεξιά, να γράψετε τις συναρτήσεις x=x(t), της θέσης κάθε σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις τους.

Δίνεται ότι η διάρκεια κάθε κρούσης είναι αμελητέα, τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

i) Από τη στιγμή που τα δυο σώματα έχουν ίσες μάζες, κατά την κεντρική και ελαστική μεταξύ τους κρούση ανταλλάσουν ταχύτητες, οπότε θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, οι ταχύτητες των σωμάτων Σ και Β μετά την κρούση έχουν τιμές:

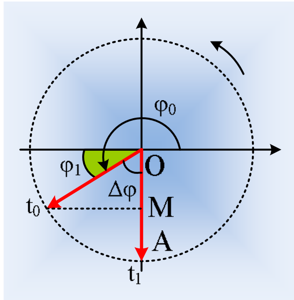
$$\upsilon_\Sigma=\upsilon_1'=-1m/s \quad \text{και} \quad \upsilon_B=\upsilon_2'=0$$

ii) Η εξίσωση της απομάκρυνσης της απλής αρμονικής ταλάντωσης, που θα εκτελέσει το σώμα Σ μετά την κρούση, θα έχει μορφή x=A·ημ(ωt+φ_0). Αλλά τότε η φάση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή:

$$\varphi=\omega t+\varphi_0$$

Έτσι αμέσως μετά την κρούση θα έχουμε φάση $\varphi_0=\omega\cdot 0+\varphi_0=\varphi_0$, ενώ τη στιγμή μηδενισμού της ταχύτητάς του, τη στιγμή t_1 η φάση έχει τιμή $\varphi_1=\omega t_1+\varphi_0$. Συνεπώς η μεταβολή της φάσης είναι:

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0=\omega(t_1-t_0)=\sqrt{\frac{k}{m}}(t_1-0)=\sqrt{\frac{40}{4}}\frac{1}{3}rad=\frac{\pi}{3}rad$$



Ας το δούμε από μια άλλη οπτική γωνία. Το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωσή του τη στιγμή t_0 από μια απομάκρυνση $x_1<0$ και θα κινηθεί μέχρι να φτάσει τη στιγμή t_1 σε απομάκρυνση x=-A. Παίρνοντας ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκους A το οποίο στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, η προβολή του στον κατακόρυφο άξονα y, κάθε στιγμή, δίνεται από την εξίσωση $y=A\cdot ημ(ω\cdot t+φ_0)$. Αλλά τότε τη στιγμή που ξεκινά η ταλάντωση του Σ, το διάνυσμα βρίσκεται στη θέση του σχήματος, ενώ μέχρι τη στιγμή t_1 έχει διαγράψει γωνία $Δφ=ω\cdot t=\frac{π}{3}rad$.

Πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\phi_1=\frac{\pi}{6}rad$, $\varphi_0=\frac{7\pi}{6}rad$ και (OM)= ½ A δηλαδή η κρούση έγινε στη θέση x_1= - ½ A.

iii) Από την ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ παίρνουμε:

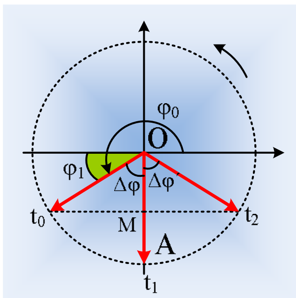
$$K_0+U_0=E_τ\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mυ_1'^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA^2\rightarrow \quad (1)$$

$$mυ_1'^2+k\cdot\frac{A^2}{4}=kA^2\rightarrow\rightarrow$$

$$A=2υ_1'\sqrt{\frac{m}{3k}}=2\cdot 1\sqrt{\frac{4}{3\cdot 40}}m=\frac{\sqrt{30}}{15}m\approx 0{,}36m$$

Αλλά τότε η αρχική θέση του σώματος Σ είναι x_1=-0,18m οπότε και το ελατήριο έχει συσπείρωση Δl=0,18m.



iv) Με βάση το i) ερώτημα το σώμα Β σταμάτησε μετά την κρούση στη θέση x_1=-0,18m. Αλλά τότε το Σ, μετά τον μηδενισμό της ταχύτητάς του τη στιγμή t_1 θα κινηθεί προς τα δεξιά και θα συγκρουστεί ξανά με το Β τη στιγμή t_2. Όμως με βάση το διπλανό σχήμα, το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα πρέπει να διαγράψει τη γωνία Δφ΄= Δφ, οπότε θα χρειαστεί χρονικό διάστημα:

$$Δt_2=Δt_1=t_1-t_0=t_1=1/3\ s\ \rightarrow t_2=2/3\ s.$$

α) Η δεύτερη κρούση θα πραγματοποιηθεί στην ίδια θέση με την πρώτη και από την (1) προκύπτει ότι το σώμα Σ θα έχει τη στιγμή της κρούσης, ταχύτητα μέτρου $υ_1$=1m/s, με φορά προς τα δεξιά. Ξανά θα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων, οπότε το σώμα Β θα αποκτήσει ταχύτητα $υ_B$=1m/s, ενώ η ταχύτητα του Σ θα μηδενιστεί. Όμως έτσι το σώμα Σ θα ξεκινήσει μια νέα ταλάντωση με πλάτος $A_1=|x_1|$=0,18m, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, η οποία δεν είναι άλλη από τη θέση φυσικού μήκους, ξεκινώντας από θέση πλάτους με μηδενική ταχύτητα και θα χρειαστεί χρονικό διάστημα:

$$\Delta t_\Sigma = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4}{40}}s = 0{,}5s$$

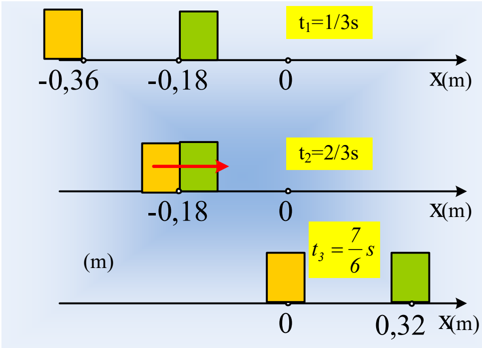
για να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους, την χρονική στιγμή $t_3=t_2+\Delta t_\Sigma=\frac{2}{3}s+\frac{1}{2}s=\frac{7}{6}s$.

Την ίδια στιγμή το σώμα Β θα έχει μετατοπισθεί κατά:

$\Delta x_B=\upsilon_B\cdot\Delta t_\Sigma=1\cdot 0{,}5m=0{,}5m$

Φτάνοντας στη θέση $x_B=\Delta x_B+x_1=0{,}5m-0{,}18m=0{,}32m$.

Αυτή θα είναι και η απόσταση μεταξύ των σωμάτων τη στιγμή t_3.



β) Αν δεν είχαμε τη δεύτερη κρούση, το σώμα Σ θα χρειαζόταν χρόνο Τ/4 για να μεταβεί από την ακραία θέση x=-0,36m στη θέση ισορροπίας (x=0), οπότε θα έφτανε σε αυτήν τη στιγμή $t'=t_1+T/4=\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}s=\frac{5}{6}s$. Εξαιτίας της κρούσης (η οποία είναι ακαριαία!) θα φτάσει τη στιγμή t_3, αργότερα δηλαδή κατά:

$$\Delta t = t_3 - t' = \frac{7}{6}s - \frac{5}{6}s = \frac{1}{3}s$$

γ) Με βάση την προηγούμενη ανάλυση για την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Σ από τη θέση ισορροπίας θα έχουμε:

- Μέχρι τη δεύτερη κρούση, ξεκινά την ταλάντωσή του τη στιγμή $t_0=0$ με αρχική φάση $\varphi_0=\pi+\pi/6$, με γωνιακή συχνότητα ω=π rad/s και με πλάτος Α=0,36m, οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή:

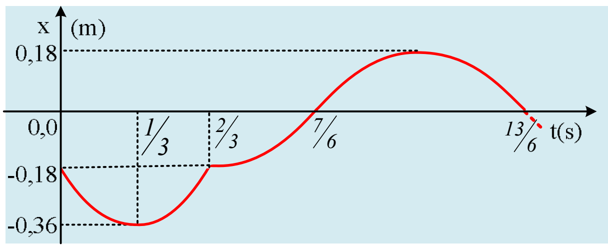
$$x_1 = A\cdot\eta\mu\left(\omega t+\frac{7\pi}{6}\right)=0{,}36\cdot\eta\mu\left(\pi t+\frac{7\pi}{6}\right)\ \text{(S.I.) με } 0\le t<\frac{2}{3}s$$

- Μετά τη 2η κρούση, ξεκινά την νέα ταλάντωσή του από την θέση του νέου πλάτους $x_1'=-0{,}18m$, με την ίδια γωνιακή συχνότητα αλλά με αρχική φάση 3π/2 (γιατί;) και η εξίσωση θα είναι:

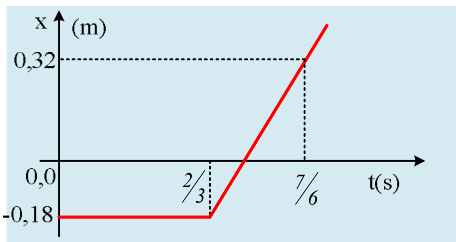
$$x_1 = A_1\cdot\eta\mu\left(\omega\cdot\Delta t+\frac{3\pi}{2}\right)=0{,}18\cdot\eta\mu\left(\pi\left(t-\frac{2}{3}\right)+\frac{3\pi}{2}\right)\rightarrow$$

$$x_1 = 0{,}18\cdot\eta\mu\left(\pi t+\frac{5\pi}{6}\right)\ \text{(S.I.) με } t\ge\frac{2}{3}s$$

Τα παραπάνω οδηγούν στην χάραξη της α΄ γραφικής παράστασης:



(Σ)



(Β)

Αντίστοιχα το σώμα Β, παραμένει ακίνητο μέχρι τη στιγμή t_2 της $2^{ης}$ κρούσης στη θέση x_2=-0,18m ενώ στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα ομαλά προς τα δεξιά με εξίσωση κίνησης:

$$\Delta x_2 = \upsilon_B \cdot \Delta t \rightarrow x_2 - (-0{,}18) = 1 \cdot \left(t - \frac{2}{3} \right) \rightarrow$$

$$x_2 = -\frac{2{,}54}{3} + t \quad \text{(S.I.)} \ \text{με } t \geq \frac{2}{3}\ \text{s}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση στο β΄ διάγραμμα.

dmargaris@gmail.com