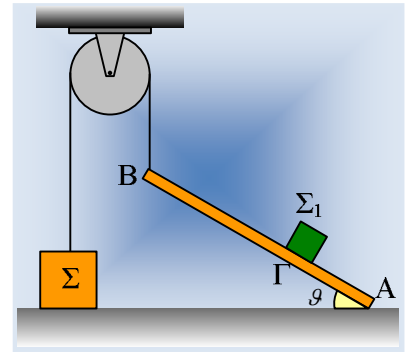


Η δοκός και το αντίβαρο

Η ομογενής δοκός AB μήκους $l=2\text{m}$ και βάρους $w=200\text{N}$, ισορροπεί όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία θ με το μη λείο οριζόντιο επίπεδο, όπου $\eta\mu\theta=0,6$. Το άκρο B είναι δεμένο στο ένα άκρο νήματος, το οποίο αφού περάσει από τροχαλία, στο άλλο του άκρο έχει δεθεί σαν αντίβαρο ένα σώμα Σ βάρους $w_1=160\text{N}$, το οποίο στηρίζεται στο ίδιο επίπεδο. Και τα δυο τμήματα του νήματος είναι κατακόρυφα.



- i) Να βρείτε τις δυνάμεις που ασκεί το επίπεδο στη δοκό και στο σώμα Σ .
- ii) Τοποθετούμε ένα δεύτερο σώμα Σ_1 , βάρους $w_2=100\text{N}$, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, πάνω στη δοκό σε ένα σημείο Γ , το οποίο απέχει απόσταση $x=(\Gamma A)=0,5\text{m}$ από το άκρο A, το οποίο ισορροπεί, χωρίς να διαταράσσεται η ισορροπία της δοκού.
 - α) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ του Σ_1 και της δοκού για την παραπάνω ισορροπία.
 - β) Να βρείτε ξανά τις δυνάμεις που ασκεί το οριζόντιο επίπεδο σε δοκό και αντίβαρο Σ .
- iii) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση (ΔA) από το άκρο A της δοκού, στην οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε το σώμα Σ_1 , χωρίς να διαταραχθεί η ισορροπία της δοκού;
- iv) Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_1 και της δοκού ήταν $\mu=0,5$ και αφήσουμε το σώμα Σ_1 στην παραπάνω θέση Δ , να υπολογίσετε την τριβή που ασκείται στη δοκό από το οριζόντιο επίπεδο και η οποία εξασφαλίζει την ισορροπία της.

Απάντηση:

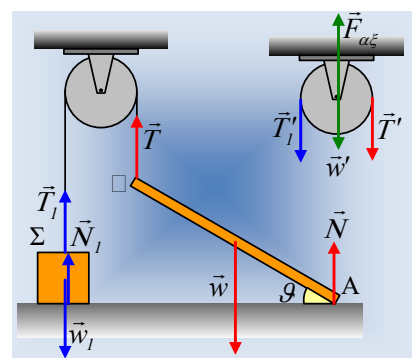
- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε δοκό, αντίβαρο Σ καθώς και οι δυνάμεις που ασκούνται από το νήμα στην τροχαλία. Αφού η δοκός ισορροπεί με την επίδραση τριών δυνάμεων, εκ των οποίων η τάση του νήματος T και το βάρος w είναι κατακόρυφες, κατακόρυφη θα είναι και η δύναμη από το οριζόντιο επίπεδο N , χωρίς να εμφανιστεί κάποια δύναμη τριβής. Μόνο τότε θα ισχύει η συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } T+N=w \quad (1)$$

Ενώ αν πάρουμε τις ροπές ως προς το άκρο A θα έχουμε:

$$\Sigma \tau_A=0 \text{ ή } w \cdot \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T \cdot l \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \rightarrow T = \frac{w}{2} = 100\text{N}.$$

Οπότε επιστρέφοντας στην (1) βρίσκουμε $N=w-T=200\text{N}-100\text{N}=100\text{N}$.



Αν έρθουμε τώρα στην τροχαλία και αυτή ισορροπεί, τότε αν T' και T_1' οι δυο τάσεις του νήματος ισχύει:

$$\Sigma\tau=0 \text{ ή } T' \cdot R = T_1' \cdot R \rightarrow T' = T_1' = T = 100N = T_1$$

Αλλά και το σώμα Σ ισορροπεί:

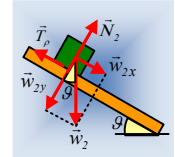
$$\Sigma F=0 \rightarrow T_1+N_1=w_1 \rightarrow N_1=w_1-T_1=160N-100N=60N.$$

ii) α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ_1 , όπως στο διπλανό σχήμα.

Από την ισορροπία του Σ_1 παίρνουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_2=w_{2y}=w_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta=100N \cdot 0,8=80N$$

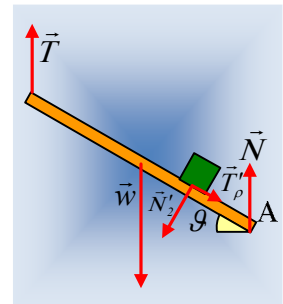
$$\Sigma F_x=0 \rightarrow T_\rho = w_{2x}=w_2 \cdot \eta\mu\theta=100N \cdot 0,6=60N.$$



Αλλά για να ισορροπεί το Σ_1 θα πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, δηλαδή:

$$T_\rho \leq T_{op} \text{ ή } T_\rho \leq \mu_s \cdot N_2 \rightarrow \mu_s \geq \frac{T_\rho}{N_2} \rightarrow \mu_s \geq \frac{60}{80} \text{ ή } \mu_s \geq 0,75$$

β) Ερχόμαστε τώρα στη δοκό και στις δυνάμεις που δέχεται, όπου από το σώμα Σ_1 δέχεται την αντίδραση της N_2 και της τριβής T_ρ . Με βάση το προηγούμενο ερώτημα η συνισταμένη των δύο αυτών μας δίνει μια κατακόρυφη δύναμη ίση με το βάρος w_2 του σώματος Σ_1 . Αλλά τότε και πάλι στη δοκό ασκούνται μόνο κατακόρυφες δυνάμεις και από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:



$$\Sigma F=0 \text{ ή } T+N=w+w_2 \text{ (2) και}$$

$$\Sigma\tau_A=0 \text{ ή } w \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + N_2' \cdot x - T \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \rightarrow T = \frac{w}{2} + \frac{N_2' \cdot x}{\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} \text{ (3)} \rightarrow$$

$$T = \frac{w}{2} + \frac{N_2' \cdot x}{\ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{200N}{2} + \frac{80 \cdot 0,5N}{2 \cdot 0,8} = 125N$$

Και με αντικατάσταση στην (2):

$$N=w+w_1-T=200N+100N-125N=175N$$

Όμως και πάλι ισορροπεί η τροχαλία οπότε (δουλεύουμε όπως και στο i) ερώτημα) $T_1'=T_1=T=125N$ και από την ισορροπία του αντίβαρου Σ :

$$\Sigma F=0 \rightarrow T_1+N_1=w_1 \text{ (4)}$$

$$N_1=w_1-T_1=160N-125N=35N.$$

iii) Με βάση την εξίσωση (3) η τάση του νήματος εξαρτάται από την απόσταση x , την απόσταση του σώματος Σ_1 από το άκρο A και όταν το x αυξάνεται, αυξάνεται και η τάση του νήματος. Αυτό όμως οδηγεί στη μείωση στη μείωση της αντίδρασης του επιπέδου N_1 η οποία ασκείται στο αντίβαρο Σ , με βάση την σχέση (4). Αλλά τότε η μέγιστη απόσταση είναι αυτή για την οποία $N_1=0$, χωρίς να επιταχύνεται το α-

ντίβαρο προς τα πάνω, ισορροπώντας οριακά σε επαφή με το επίπεδο. Όμως τότε $T_1=w_1=160\text{N}$ και επιστρέφοντας στην εξίσωση (3):

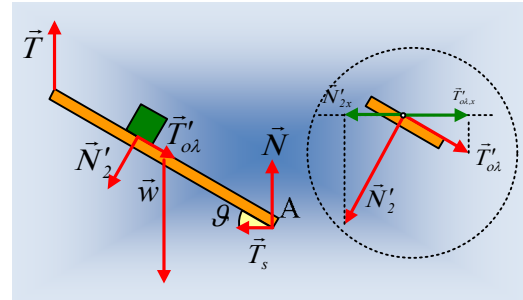
$$w \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + N'_2 \cdot x_{\max} - T_{\max} \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \rightarrow x_{\max} = \frac{2T_{\max} - w}{2N'_2} \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$x_{\max} = \frac{2T_{\max} - w}{2N'_2} \cdot \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2 \cdot 160\text{N} - 200\text{N}}{2 \cdot 80\text{N}} \cdot 2\text{m} \cdot 0,8 = 1,2\text{m}$$

iv) Αν τώρα ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_1 και της δοκού είναι $\mu=0,5$, με βάση το υποερώτημα ii)α το σώμα θα ολισθήσει δεχόμενο δύναμη τριβής ολίσθησης μέτρου:

$$T_{ολ} = \mu \cdot N'_2 = 0,5 \cdot 80\text{N} = 40\text{N}$$

Παίρνοντας ξανά τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπως στο διπλανό σχήμα και αναλύοντας τις N'_2 και $T'_{ολ}$



σε συνιστώσες στην οριζόντια διεύθυνση παίρνουμε από τη συνθήκη ισορροπίας της δοκού: $\Sigma \vec{F} = 0$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow T_{ολx}' - N_{2x}' - T_s = 0 \rightarrow T_{ολ} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - N_2 \cdot \eta\mu\theta - T_s = 0 \rightarrow \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

$$T_s = 40 \cdot 0,8 - 80 \cdot 0,6 = 32\text{N} - 48\text{N} = -16\text{N}$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε μας λέει ότι στη δοκό θα ασκηθεί δύναμη τριβής από το οριζόντιο επίπεδο, η οποία θα έχει φορά προς τα δεξιά (αντίθετης φοράς από αυτή που αρχικά σχεδιάσαμε στο σχήμα).

dmargaris@gmail.com