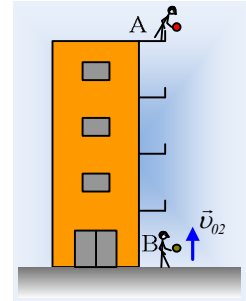


Δυο μπάλες κινούνται κατακόρυφα

Δυο φίλοι, ο Αντώνης και ο Βασίλης, βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη, ο Αντώνης στην ταράτσα μιας πολυκατοικίας και ο Βασίλης στο έδαφος, όπως στο διπλανό σχήμα. Κάποια στιγμή $t_0=0$, ο Αντώνης αφήνει να πέσει ελεύθερα μια μικρή σφαίρα (α), ενώ την ίδια στιγμή ο Βασίλης εκτοξεύει κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω, μια δεύτερη σφαίρα (β) με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_{02}=20\text{m/s}$. Οι δυο μπάλες συγκρούονται τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της (β) και στη συνέχεια πέφτουν στο έδαφος, κινούμενες πάντα στην ίδια κατακόρυφο.



- i) Ποια σφαίρα κινείται με μεγαλύτερη επιτάχυνση;
- ii) Να πάρετε έναν κατακόρυφο άξονα y , με $y=0$ τη θέση που αφήνεται η πρώτη σφαίρα να κινηθεί και με θετική φορά προς τα κάτω. Με βάση τον άξονα αυτό να γράψετε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης κάθε σφαίρας, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iii) Ποια χρονική στιγμή συγκρούονται οι δυο σφαίρες και σε πόσο ύψος θα γίνει η σύγκρουση μεταξύ τους;
- iv) Από ποιο ύψος ο Αντώνης αφήνει την (α) σφαίρα να πέσει;
- v) Αν η δεύτερη σφαίρα (β) φτάνει ξανά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_2=3\text{s}$, να υπολογιστεί η ταχύτητά της τη στιγμή που κτυπά στο έδαφος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, ενώ δεχόμαστε ότι η δεύτερη σφαίρα ξεκινά την κίνησή της από το έδαφος (μηδενικό ύψος).

Απάντηση:

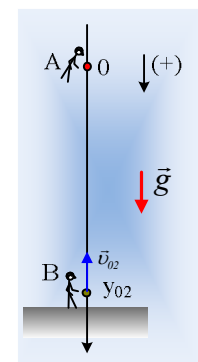
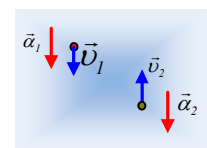
- i) Και οι δυο σφαίρες κινούνται με την ίδια επιτάχυνση, ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας μέτρου g . Με την επιτάχυνση αυτή, η πρώτη σφαίρα (α) θα κινηθεί επιταχυνόμενη κάνοντας ελεύθερη πτώση, ενώ η δεύτερη (β) θα κινηθεί επιβραδυνόμενη, αφού η ταχύτητα έχει φορά προς τα πάνω και η επιτάχυνση προς τα κάτω.
- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει τον άξονα y . Η σφαίρα (α) εκτελεί ελεύθερη πτώση, κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη με επιτάχυνση $a_1=+g=10\text{m/s}^2$, ξεκινώντας από τη θέση $y_{01}=0$, οπότε ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_1 = a_1 \cdot t \rightarrow v_1 = g \cdot t \rightarrow v_1 = 10t \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

$$y_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 \rightarrow y_1 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow y_1 = 5 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.}) \quad (2)$$

Η σφαίρα (β) εκτελεί επίσης κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιβραδυνόμενη) με την ίδια επιτάχυνση, ξεκινώντας από τη θέση y_{02} , άρα έχουμε:

$$v_2 = v_{02} + a_2 \cdot t \rightarrow v_2 = -20 + 10t \quad (\text{S.I.}) \quad (3)$$



$$\Delta y_2 = v_{02} \cdot t + \frac{1}{2} a_2 \cdot t^2 \rightarrow \Delta y_2 = -20t + 5 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.}) \quad (4)$$

Αλλά τότε η εξίσωση θέσης της (β) σφαίρας είναι:

$$y_2 - y_{02} = -20t + 5 \cdot t^2 \rightarrow y_2 = y_{02} - 20t + 5 \cdot t^2 \quad (5)$$

iii) Οι δυο σφαίρες συγκρούονται τη στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας της (β) σφαίρας, οπότε από τη σχέση (3) παίρνουμε με αντικατάσταση $v_2=0$:

$$-20 + 10t_1 = 0 \rightarrow t_1 = 2\text{s}$$

Αλλά τότε με αντικατάσταση στην (4) παίρνουμε:

$$\Delta y_2 = -20t + 5 \cdot t^2 = -20 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 = -20\text{m}$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο μας δείχνει ότι η μετατόπιση έχει φορά προς τα πάνω.

Συνεπώς η σύγκρουση πραγματοποιήθηκε σε ύψος από το έδαφος $h=20\text{m}$.

iv) Με αντικατάσταση $t=t_1$ στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$y_1 = 5 \cdot t^2 = 5 \cdot 2^2 \text{m} = 20\text{m}$$

Συνεπώς η σφαίρα αφέθηκε να κινηθεί από ύψους H , όπου

$$H = y_1 + |\Delta y_2| = 20\text{m} + 20\text{m} = 40\text{m}$$

v) Έστω ότι η σύγκρουση έγινε στο σημείο Κ και η (β) σφαίρα αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα v_0 , όπως στο σχήμα. Για την κίνηση της (β) σφαίρας έχουμε:

$$v = v_0 + a_2 \cdot \Delta t \rightarrow v = v_0 + 10 \cdot \Delta t \quad (\text{S.I.}) \quad (5)$$

$$\Delta y = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \cdot \Delta t^2 \rightarrow \Delta y = v_0 \cdot \Delta t + 5 \cdot \Delta t^2 \quad (\text{S.I.}) \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (6) $\Delta t = t_2 - t_1 = 3\text{s} - 2\text{s} = 1\text{s}$ και $\Delta y = h = 20\text{m}$ έχουμε:

$$20 = v_0 \cdot 1 + 5 \cdot 1^2 \rightarrow v_0 = 15\text{m/s}$$

Οπότε από την (5) βρίσκουμε:

$$v = v_0 + 10 \cdot \Delta t = 15\text{m/s} + 10 \cdot 1\text{m/s} = 25\text{m/s}.$$

Σχόλιο:

Η εξίσωση (5) λαμβάνοντας υπόψη ότι $y_{02}=40\text{m}$ γράφεται:

$$y_2 = 40 - 20t + 5 \cdot t^2 \quad (5^a)$$

