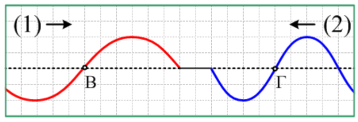
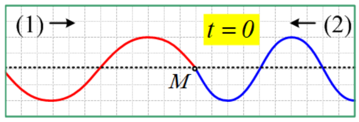
# Δυο κύματα στο ίδιο μέσον




Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με αντίθετη φορά δυο κύματα, με αποτέλεσμα κάποια στιγμή, η μορφή μιας περιοχής του μέσου, να είναι όπως στο πάνω σχήμα.

i) Αντλώντας πληροφορίες από το σχήμα, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

A) Αν η περίοδος του (1) κύματος είναι $T_1$=0,5s, τότε η περίοδος του (2) κύματος είναι ίση:

α) $T_2$=0,3s, β) $T_2$= 1/3 s, $T_3$= 2/3 s, δ) $T_2$=0,8s.

B) Να σχεδιάστε στο σχήμα τις ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων Β και Γ. Ποια από τις δύο έχει μεγαλύτερο μέτρο;

Γ) Μετά από λίγο, μια στιγμή που θεωρούμε t=0, τα δυο κύματα συναντώνται στο σημείο Μ, όπως στο δεύτερο σχήμα. Το σημείο Μ αμέσως μετά:

α) Θα κινηθεί προς τα πάνω.

β) θα κινηθεί προς τα κάτω.

γ) Θα παραμείνει ακίνητο.

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας.

ii) Αν το πλάτος κάθε κύματος είναι Α=0,2m, αφού βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου Μ, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_1$=2/3 s:

α) την τιμή της απομάκρυνσης του σημείου Μ.

β) την τιμή της ταχύτητας ταλάντωσης του Μ.

### *Απάντηση:*

i) Με βάση το σχήμα, το μισό μήκος κύματος του (1) κύματος αντιστοιχεί σε 6 τετραγωνάκια, οπότε αν d το μήκος καθενός, τότε $\lambda_1$=12d. Αντίστοιχα για το (2) κύμα $\lambda_2$=8d.

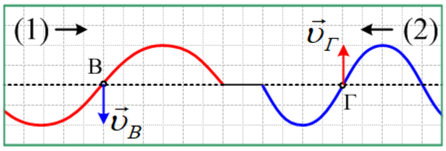
A) Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων εξαρτάται από το μέσον, συνεπώς τα δυο κύματα έχουν την ίδια ταχύτητα κύματος, οπότε:

$$\upsilon=\lambda_1 \cdot f_1 \text{ και } \upsilon=\lambda_2 f_2 \rightarrow \lambda_1 \cdot f_1 = \lambda_2 f_2 \rightarrow$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{1}{T_1} = \lambda_2 \cdot \frac{1}{T_2} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0{,}5s \cdot \frac{8d}{12d} = \frac{1}{3}s$$

Σωστό το β)

Β) Το σημείο Β, διεγείρεται σε ταλάντωση από τα υλικά σημεία που βρίσκονται αριστερά του έχοντας αρνητική απομάκρυνση, με αποτέλεσμα μετά από λίγο να αποκτά και αυτό αρνητική απομάκρυνση, πράγμα που σημαίνει ότι έχει ταχύτητα με φορά προς τα κάτω.



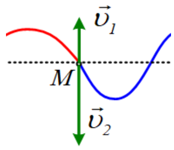

Αντίθετα το σημείο Γ του δεύτερου κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά, εξαναγκάζεται σε ταλάντωση από το διπλανό του υλικό σημείο στα δεξιά του. Αλλά τα σημεία στα δεξιά του, έχουν θετική απομάκρυνση, οπότε και το σημείο Γ έχει ταχύτητα προς τα πάνω, ώστε να αποκτήσει σε λίγο θετική απομάκρυνση επίσης.

Όσον αφορά τα μέτρα των ταχυτήτων αυτών έχουμε:

$$\upsilon_B = \omega_1 A = \frac{2\pi}{T_1}A \quad \text{και} \quad \upsilon_\Gamma = \omega_2 A = \frac{2\pi}{T_2}A$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου, οπότε αφού $T_1 > T_2$ θα έχουμε $\upsilon_2 > \upsilon_1$ δηλαδή $\upsilon_\Gamma > \upsilon_B$.

Γ) Το σημείο Μ, τη στιγμή που φτάνουν σε αυτό τα δυο κύματα, αποκτά ταχύτητα $\upsilon_1$ εξαιτίας του πρώτου κύματος με φορά προς τα πάνω και ταχύτητα $\upsilon_2$ εξαιτίας του δεύτερου κύματος με φορά προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά με βάση το προηγούμενο ερώτημα $\upsilon_2 > \upsilon_1$, οπότε η συνολική ταχύτητα έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Συνεπώς το σημείο Μ θα κινηθεί προς τα κάτω.




ii) Εξαιτίας του πρώτου κύματος που φτάνει στο σημείο Μ, αυτό θα αρχίσει να ταλαντώνεται προς τα πάνω. Αν πάρουμε την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, η εξίσωση της απομάκρυνσης του Μ θα είναι της μορφής:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu(\omega_1 t) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) \rightarrow y_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(4\pi t) \ \text{(S.I.) με } t \geq 0$$

Εξαιτίας τώρα του δεύτερου κύματος ξεκινά την ταλάντωσή του προς την αρνητική κατεύθυνση, οπότε έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \pi$ και η εξίσωση της αντίστοιχης απομάκρυνσης θα είναι:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu(\omega_2 t + \pi) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T_2}t + \pi\right) \rightarrow y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(6\pi t + \pi) \ \text{(S.I.) με } t \geq 0$$

Αλλά τότε, με βάση την αρχή της επαλληλίας, η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο ταλαντώσεων και η απομάκρυνσή του θα είναι:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu(4\pi t) + 0{,}2 \cdot \eta\mu(6\pi t + \pi) = 0{,}2 \cdot [\eta\mu(4\pi t) + \eta\mu(6\pi t + \pi)] \rightarrow$$

$$y = 0{,}2 \cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi t - (6\pi t + \pi)}{2} \cdot \eta\mu\frac{4\pi t + (6\pi t + \pi)}{2} \rightarrow$$

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.) με } t \geq 0$$

α) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση $t = t_2 = 2/3$ s παίρνουμε:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(5\pi\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{23\pi}{6}\right) = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$y = 0{,}4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) m = 0{,}1\sqrt{3} m$$

β) Αλλά από την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε και για τις ταχύτητες:

$$\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = A\omega_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) + A\omega_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(6\pi t + \pi)$$

Και με αντικατάσταση t= 2/3s παίρνουμε:

$$\upsilon = 0{,}2 \cdot 4\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(4\pi\frac{2}{3}\right) + 0{,}2 \cdot 6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(6\pi\frac{2}{3} + \pi\right) = 0{,}8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 1{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi) =$$

$$\upsilon = 0{,}8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - 1{,}2\pi = 0{,}8\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1{,}2\pi = -1{,}6\pi \text{ m/s.}$$

***dmargaris@gmail.com***