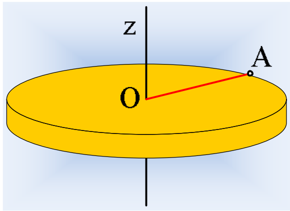
Από τη γωνία σε γωνιακή ταχύτητα-επιτάχυνση



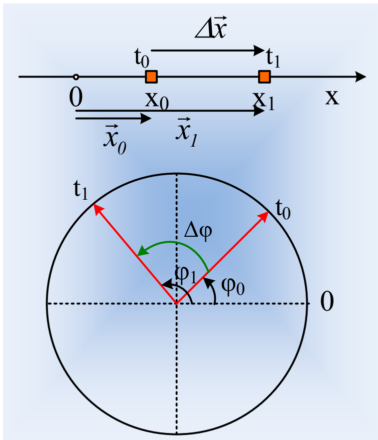
Ένας δίσκος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, κάθετο στο επίπεδό του, που περνά από το κέντρο του Ο, όπως στο σχήμα. Αναφερόμενοι σε μια ακτίνα ΟΑ, θέλοντας να προσδιορίσουμε τη θέση της, χρειαζόμαστε μια εξίσωση φ=f(t), της γωνιακής θέσης της ακτίνας σε συνάρτηση με το χρόνο. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της ακτίνας (συνεπώς και του δίσκου) και η αντίστοιχη γωνιακή της επιτάχυνση, κάνοντας και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις ω=ω(t) και $α_{γων}$=α(t) στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) φ=2t (S.I.), ii) φ= 4+3t (S.I.), iii) φ= 5-2t (S.I.),

iv) φ=$2t^2$ (S.I.), v) φ=4-t^2 (S.I.), vi) φ=0,2·ημ(5t) (S.I.)

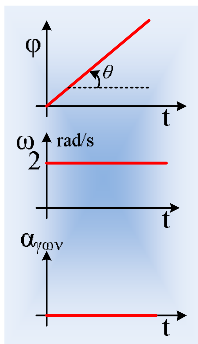
Απάντηση:

Λίγη θεωρία…



Όταν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα, θέλοντας να μελετήσουμε την κίνησή του, πρώτα ορίζουμε ένα άξονα x και θέτουμε την αρχή του άξονα x=0, καθώς και κάποια στιγμή, την οποία θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου (t_0=0). Με βάση αυτά, βρίσκουμε κάποια εξίσωση κίνησης, για παράδειγμα Δx= υ·Δt, ή x=x_0+υ·t, όπου x η θέση του σώματος και Δx η μετατόπιση του σώματος εντός κάποιου χρονικού διαστήματος.

Κατά αντιστοιχία, για να μελετήσουμε την περιστροφή κάποιου στερεού, όπως εδώ ο δίσκος, εστιάζουμε την προσοχή μας σε μια ορισμένη διεύθυνση (εδώ η ακτίνα ΟΑ), ορίζουμε κάποια θέση ως αρχή μέτρησης των γωνιών (φ=0) και κάποια στιγμή ως t_0=0. Έτσι τη στιγμή t_0=0 η ακτίνα έχει (αρχική) γωνιακή θέση $φ_0$, ενώ η εξίσωση κίνησής της θα έχει κάποια μορφή, για παράδειγμα φ=$φ_0$+ω·t, όπου φ η γωνία της ακτίνας και Δφ η μεταβολή της γωνίας, η γωνιακή μετατόπιση, που δεν είναι τίποτα άλλο από την γωνία που έχει περιστραφεί η ακτίνα (άρα και το στερεό) στο χρονικό διάστημα που μελετάμε.



i) Αν φ=2t, τότε ο δίσκος έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 - 2t_1}{t_2 - t_1} = 2rad/s$$

Αλλά αν η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με 2rad/s η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδενική.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν κάναμε τη γραφική παράσταση της γωνίας σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως στο πρώτο σχήμα. Η κλίση της ευθείας είναι σταθερή και αριθμητικά ίση με τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού.

Αξίζει όμως να τονιστεί ότι ο υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας, όπως παραπάνω, δεν είναι τίποτα άλλο, παρά η παράγωγος της γωνίας!

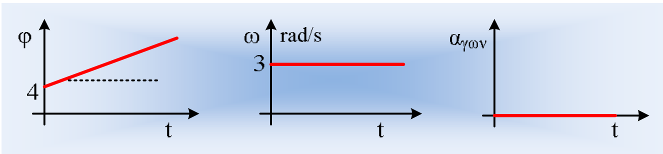
$$\omega = \omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Όπου απλά ο στιγμιαίος ρυθμός $\frac{d\varphi}{dt}$ είναι ίσος και με τον μέσο ρυθμό $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ μεταβολής της γωνίας.

ii) Αν φ=4+3t, με την ίδια συλλογιστική, όπως παραπάνω βρίσκουμε:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 3rad/s \quad \text{και } \alpha_{\gamma\omega\nu}=0$$

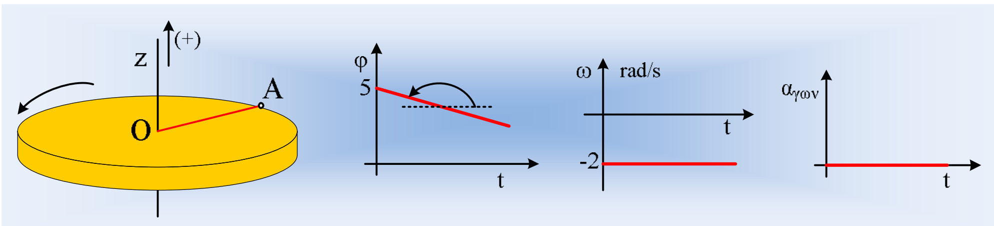
Με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, όπως οι παρακάτω:



iii) Με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(5-2t)}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = -2rad/s \quad \text{και } \alpha_{\gamma\omega\nu}=0$$

Όπου η αρνητική τιμή της γωνιακής ταχύτητας, δεν δείχνει τίποτα άλλο, παρά το στερεό στρέφεται αντίθετα από την φορά που έχουμε ορίσει ως θετική. Έτσι θεωρώντας ότι θετική φορά περιστροφής είναι αυτή που θα μας έδινε γωνιακή ταχύτητα προς τα πάνω, όπως στο πρώτο σχήμα, στην περίπτωσή μας, η γωνιακή ταχύτητα έχει φορά προς τα κάτω ή ισοδύναμα ο δίσκος στρέφεται δεξιόστροφα.



Σχόλιο 1ο:

Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις ο δίσκος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, η κίνησή του είναι δηλαδή ομαλή στροφική. Μπορείτε να κάνετε συγκρίσεις με τις αντίστοιχες ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις που να περιγράφονται από εξισώσεις:

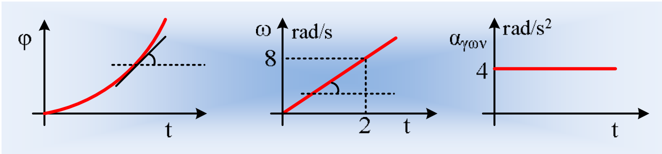
α) x=2t, β) x=4+3t, γ) x=5-2t.

iv) Αν $\varphi=2t^2$, θα έχουμε:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(2t^2\right)' = 4t \quad \text{και}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(4t)}{dt} = 4rad/s^2.$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, όπου η κλίση στο διάγραμμα φ-t είναι αριθμητικά ίση με τη γωνιακή ταχύτητα, ενώ η αντίστοιχη κλίση στο διάγραμμα ω-t, είναι ίση με τη γωνιακή επιτάχυνση. Θυμηθείτε τι ακριβώς έχουμε στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση…

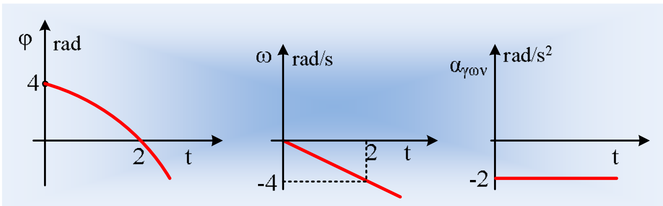


v) Αν $\varphi=4-t^2$ θα έχουμε:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(4-t^2\right)' = -2t \quad \text{(S.I.) και}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(-2t)}{dt} = -2rad/s^2.$$

Και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:



Σχόλιο 2ο:

Οι δύο παραπάνω περιπτώσεις είναι στροφικές ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις, αντίστοιχες με τις ευθύγραμμες ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις με αντίστοιχες εξισώσεις:

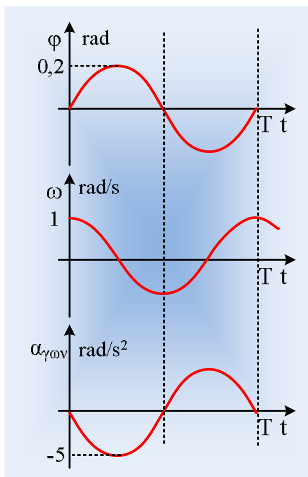
α) $x= 2t^2$ όπου $υ=4t$ και $α=4m/s^2$ και β) $x=4-t^2$, όπου $υ=-2t$ και $α=-2m/s^2$.

vi) Αν $\varphi=0{,}2\cdot ημ(5t)$ τότε:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(0{,}2\cdot\eta\mu(5t)\right)' = 0{,}2\cdot 5\cdot\sigma\upsilon\nu(5t) = 1\cdot\sigma\upsilon\nu(5t) \quad \text{(S.I.) και}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \left(1\cdot\sigma\upsilon\nu(5t)\right)' = 1\cdot 5\cdot\left(-\eta\mu(5t)\right) = -5\cdot\eta\mu(5t) \quad \text{(S.I.)}$$

Με γραφικές παραστάσεις, όπως στο διπλανό σχήμα.



Σας θυμίζει κάτι; Ο δίσκος εκτελεί μια **αρμονική στροφική ταλάν**τωση, αντίστοιχη της ΑΑΤ, όπου η γωνία φ είναι το αντίστοιχο της απομάκρυνσης x, η γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχη της ταχύτητας υ και η γωνιακή επιτάχυνση, αντίστοιχη της επιτάχυνσης.

dmargaris@gmail.com