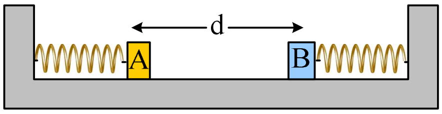
Μια ταλάντωση και η τάση του νήματος.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σώματα Α και Β, με μάζες m_1=1kg και m_2=3kg, δεμένα στα άκρα δύο οριζόντιων ελατηρίων με σταθερές k_1=100N/m και k_2=300N/m. Τα σώματα θεωρούνται αμελητέων διαστάσεων και απέχουν d=1m. Σύρουμε το σώμα Α προς τα δεξιά, δένουμε τα σώματα με νήμα μήκους ℓ=0,2m και κατόπιν, κάποια στιγμή που θεωρούμε t=0, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

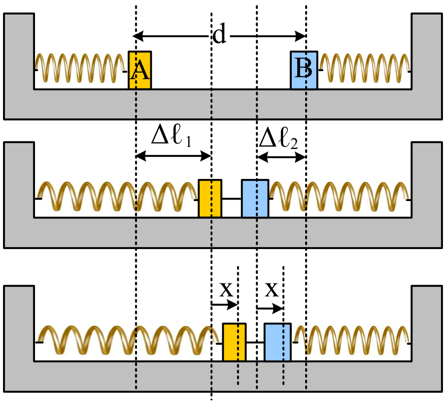


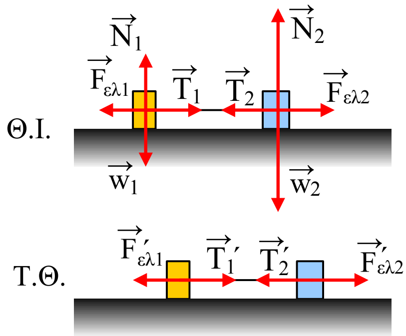
i) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα των σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ και να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης.

ii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, να βρεθεί η εξίσωση της δύναμης που ασκεί το Α σώμα στο Β, μέσω του νήματος, σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Απάντηση:

Προφανώς αφού αρχικά τα σώματα ηρεμούν, τα ελατήρια έχουν το φυσικό μήκος τους. Στο δεύτερο σχήμα, έχουν σχεδιαστεί τα σώματα, το καθένα στη θέση ισορροπίας του, και έστω ότι στη θέση αυτή τα ελατήρια έχουν επιμηκύνσεις $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$, ενώ το τρίτο σχήμα αναφέρεται σε μια τυχαία θέση, η οποία είναι δεξιά κατά x των θέσεων ισορροπίας. Για λόγους ευκρίνειας, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στα σώματα, στο διπλανό σχήμα και για τον ίδιο λόγο δεν σχεδιάστηκαν κατακόρυφες δυνάμεις στην τυχαία θέση. Εξάλλου το τεντωμένο νήμα ασκεί δυνάμεις **ίσου μέτρου** στα σώματα, συνεπώς $T_1=T_2$ και $T_1'=T_2'$.





i) Για την θέση ισορροπίας έχουμε $N_1=w_1$ και $N_2=w_2$, αφού τα σώματα ισορροπούν στον άξονα y και $F_{ελ1}=T_1$ και $F_{ελ2}=T_2$, από την ισορροπία στον άξονα x. Συνεπώς:

$$F_{ελ1}=T_1=T_2=F_{ελ2} \rightarrow k_1\cdot\Delta\ell_1=k_2\Delta\ell_2 \quad (1)$$

Αλλά $\Delta\ell_1+\Delta\ell_2$=d-ℓ=0,8m (2)

Από (1) και (2) βρίσκουμε $\Delta\ell_1$=0,6m και $\Delta\ell_2$=0,2m.

Για την τυχαία θέση έχουμε:

$$T_1'-F_{ελ1}'=m_1\alpha \quad και$$

$$F_{ελ2}'-T_2'=m_2\alpha$$

Αφού τα σώματα κινούνται ΠΑΝΤΑ μαζί, μιας και η αρχική θέση είναι και ακραία θέση της ταλάντωσης. Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda 2}{}' - F_{\varepsilon\lambda 1}{}' = m_1\alpha + m_2\alpha \text{ ή}$$

$$k_2(\Delta\ell_2 - x) - k_1(\Delta\ell_1 + x) = (m_1+m_2)\alpha \text{ ή λόγω της (1)}$$

$$-k_2x - k_1x = (m_1+m_2)\alpha \text{ ή}$$

$$\Sigma F_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = -(k_1+k_2)\cdot x$$

Συνεπώς το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2=400N/m$, γύρω από μια θέση που απέχει κατά 0,2m αριστερά της αρχικής θέσης που αφέθηκε να κινηθεί, ή με άλλα λόγια με πλάτος Α=0,2m. Συνεπώς η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E = ½ DA^2 = ½ \cdot 400 \cdot 0{,}2^2 J = 8J.$$

ii) Για το σώμα Β ισχύει:

$$\Sigma F = m_2\alpha \text{ ή}$$

$$F_{\varepsilon\lambda 2} + T_2 = m_2\cdot(-\omega^2 x) \; (2)$$

Όπου το σύστημα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία θετική απομάκρυνση, συνεπώς η $F_{\varepsilon\lambda 2}$, έχει πάντα φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

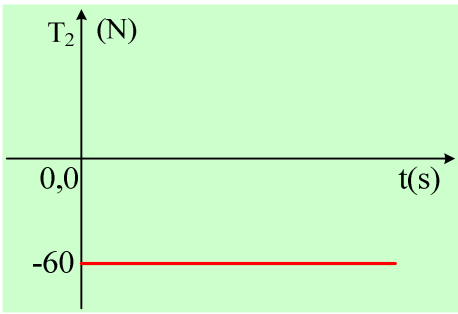
$$F_{\varepsilon\lambda 2} = k_2\cdot\Delta\ell = k_2\cdot(\Delta\ell_{20} - x) = 300\cdot 0{,}2 - 300x = 60 - 300x \text{ (S.I.)}$$

Έτσι η εξίσωση (2) δίνει:

$$T_2 = m_2\cdot(-\omega^2 x) - F_{\varepsilon\lambda 2} = - -m_2\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}x - 60 + 300x = -3\frac{100+300}{1+3}x - 60 + 300x \text{ ή}$$

$$T_2 = -60N$$

Παρατηρουμε δηλαδή ότι το Α σώμα ασκεί σταθερή δύναμη στο Β, μέσω του νήματος ή αν θέλετε η τάση του νήματος παραμένει σταθερή στη διάρκεια της ταλάντωσης. Συνεπώς η γραφική παράσταση είναι:



ς

Σχόλιο:

Η παραπάνω τιμή της τάσης προέκυψε σταθερή. Πράγμα που σημαίνει ότι κάθε σώμα ταλαντώνεται με την επίδραση μιας σταθερής δύναμης (της τάσης του νήματος) και της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο με το οποίο συνδέεται. Το αποτέλεσμα είναι να ταλαντώνεται με συχνότητα ίση με αυτή που θα είχε, αν δεν υπήρχε το άλλο σώμα. Πράγματι βρήκαμε παραπάνω ότι :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{100+300}{1+3}} rad/s = 10 rad/s$$

Ενώ αν δεν υπήρχε το δεύτερο σώμα-ελατήριο, το Α σώμα θα είχε γωνιακή συχνότητα

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{100}{1}} rad/s = 10 rad/s$$

Αυτό δεν πρέπει να μας κάνει να θεωρούμε ότι αυτή η κατάσταση θα παρουσιάζεται σε κάθε περίπτωση.

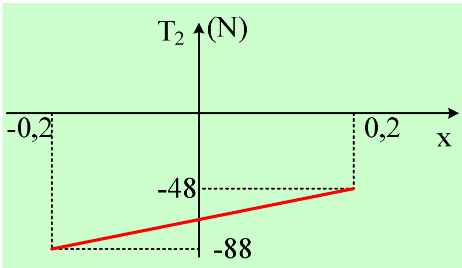
Για παράδειγμα, έστω ότι το δεύτερο ελατήριο είχε σταθερά k_2=340N/m, ενώ είχαμε τέτοιο συνδυασμό μηκών, ώστε και πάλι A=0,2m. Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις θα είχαμε:

$$F_{\varepsilon\lambda 2}=k_2 \cdot \Delta\ell=k_2 \cdot (\Delta\ell_{20}-x)=340 \cdot 0{,}2-340x = 68-340x \quad \text{(S.I.) και}$$

$$T_2=m_2 \cdot (-\omega^2 x) - F_{\varepsilon\lambda 2}=- -m_2 \frac{k_1+k_2}{m_1+m_2} x - 68 + 340x = -3\frac{100+340}{1+3} x - 68 + 340x \rightarrow$$

$$T_2= -330x - 68 + 340x = 10x - 68 \quad (S.I.)$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι η τάση του νήματος εξαρτάται από την απομάκρυνση με γραφική παράσταση, όπως στο σχήμα:



dmargaris@sch.gr