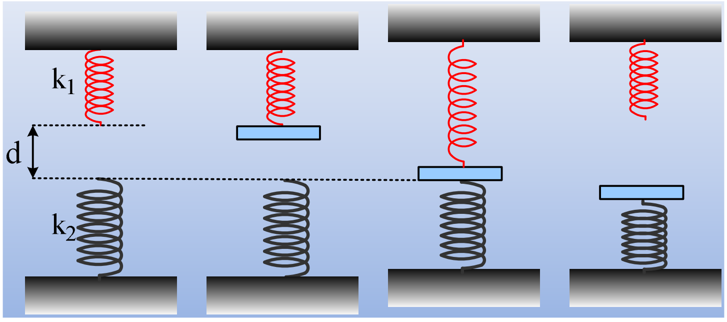
Σε πόση απόσταση και σε πόσο χρόνο;



Δυο κατακόρυφα ελατήρια σταθερών k_1=200/3N/m και k_2=200N/m, βρίσκονται όπως στο πρώτο σχήμα, με τον άξονά τους στην ίδια ευθεία και τα ελεύθερα άκρα τους να απέχουν κατά d=0,3m. Σε μια στιγμή δένουμε στο κάτω άκρο του πάνω ελατηρίου, μια λεπτή πλάκα μάζας Μ=2kg και την αφήνουμε να κινηθεί. Μόλις η πλάκα έρθει σε επαφή με το κάτω ελατήριο, το πάνω αποσυνδέεται, οπότε η πλάκα ταλαντώνεται πλέον στο πάνω άκρο του κάτω ελατηρίου.

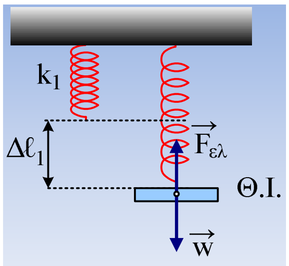
i) Πόση συνολικά απόσταση διανύει η πλάκα κινούμενη προς τα κάτω;

ii) Πόσο χρόνο διαρκεί η προς τα κάτω κίνηση της πλάκας;

Δίνεται ότι η κίνηση ενός σώματος στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου είναι ΑΑΤ και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Αφήνοντας την πλάκα να κινηθεί, αυτή θα εκτελέσει ΑΑΤ γύρω από τη θέση ισορροπίας, η οποία έχει σημειωθεί στο διπλανό σχήμα και όπου το πάνω ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell_1$:



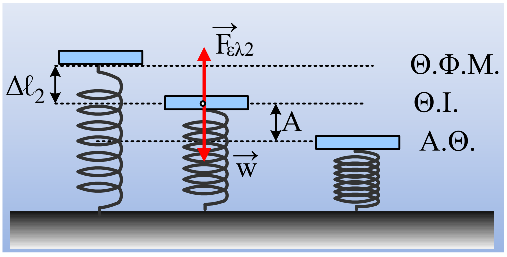
$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=w \text{ ή } k_1\cdot\Delta\ell_1=Mg \rightarrow$$

$$\Delta\ell_1=\frac{Mg}{k_1}=\frac{2\cdot 10}{200/3}m=0,3m$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι τη στιγμή που φτάνει το σώμα στη θέση ισορροπίας της α΄ ταλάντωσης, έρχεται σε επαφή με το δεύτερο ελατήριο. Αλλά αφού ξεκίνησε με μηδενική ταχύτητα από την αρχική θέση (θέση φυσικού μήκους), τότε και το πλάτος ταλάντωσης $A_1=\Delta\ell$=d=0,3m. Συνεπώς έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_1=\omega_1 A_1=\sqrt{\frac{k_1}{M}}A_1=\sqrt{\frac{200/3}{2}}0,3m/s=\sqrt{3}m/s$$

Η δεύτερη ταλάντωση της πλάκας, όταν συμπιέζει το κάτω ελατήριο, πραγματοποιείται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας, η οποία έχει σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, για την οποία ισχύει:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda 2}=w \text{ ή } k_2\cdot\Delta\ell_2=Mg \rightarrow$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{Mg}{k_2} = \frac{2\cdot 10}{200}m = 0{,}1m$$

Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, οπότε στην αρχική θέση (Θ.Φ.Μ.) θα έχουμε:

$$K + U = E \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}k_2(\Delta\ell_2)^2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2$$

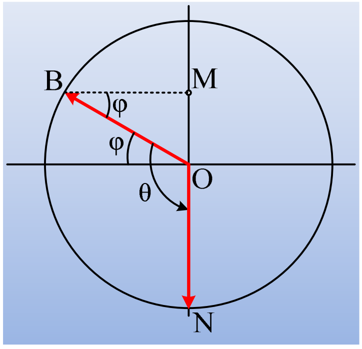
$$A_2 = \sqrt{(\Delta\ell_2)^2 + \frac{M}{k_2}\upsilon_1^2} = \sqrt{0{,}1^2 + \frac{2}{200}\left(\sqrt{3}\right)^2}m = 0{,}2m$$

Συνεπώς η συνολική απόσταση που διανύει η πλάκα καθώς κινείται προς τα κάτω είναι:

$$s = d + \Delta\ell_2 + A_2 = 0{,}3m + 0{,}1m + 0{,}2m = 0{,}6m$$

ii) Το χρονικό διάστημα που η πλάκα είναι δεμένη στο πάνω ελατήριο, είναι ίσο με $\frac{T_1}{4}$ αφού ξεκινά από ακραία θέση και φτάνει στη θέση ισορροπίας. Συνεπώς:

$$t_1 = \frac{1}{4}T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k_1}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{200/3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{20}s$$



Εξάλλου η διάρκεια της κίνησης σε επαφή με το κάτω ελατήριο, μπορεί να υπολογιστεί με βάση τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης, αφού λάβουμε υπόψη ότι το σώμα ξεκινά από μια θέση Μ, πάνω από τη θέση ισορροπίας, σε απόσταση $\Delta\ell_2$= ½ Α και φτάνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του Ν. Αλλά στο τρίγωνο ΜΟΒ η γωνία φ=30°, αφού η απέναντι κάθετος είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, συνεπώς η γωνία που διαγράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα ΟΒ είναι θ=$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Αλλά $\theta = \omega_2 t_2$ ή

$$t_2 = \frac{\theta}{\omega_2} = \frac{\theta}{\sqrt{\frac{k_2}{M}}} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\frac{200}{2}}}s = \frac{\pi}{15}s$$

Άρα ο συνολικός χρόνος για την προς τα κάτω κίνηση της πλάκας είναι:

$$t_{o\lambda} = t_1 + t_2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{20}s + \frac{\pi}{15}s = \frac{\pi}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3}\right)s \approx 0{,}48s$$

dmargaris@sch.gr