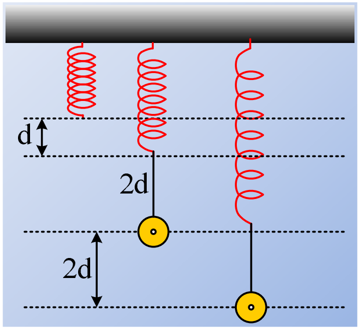
Δυο γραφικές παραστάσεις για σώμα στο άκρο νήματος.



Ένα σώμα Σ ηρεμεί όπως στο σχήμα, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους ℓ=2d=20cm, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά d=10cm, Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 2d και τη στιγμή t=0 το αφήνουμε να ταλαντωθεί.

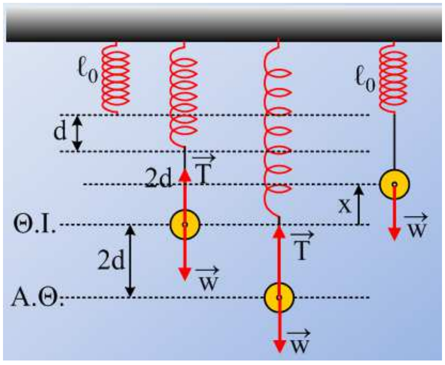
i) Σε ποια θέση μηδενίζεται η τάση του νήματος; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

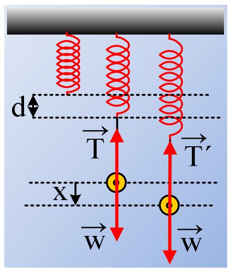
Θεωρείστε την προς τα πάνω κατεύθυνση σαν θετική, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται, γύρω από την θέση ισορροπίας, όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά d. Μόλις το σώμα βρεθεί πάνω από τη θέση ισορροπίας του κατά x=d, το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του, οπότε στη θέση αυτή, μηδενίζεται η τάση του νήματος.

Γιατί αυτό; Τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό μήκος του, δεν δέχεται δύναμη από το νήμα, αφού σύμφωνα με το νόμο του Hooke, αν στο ελατήριο ασκηθεί μια δύναμη από το νήμα, ας την ονομάσουμε τάση του νήματος Τ, θα ισχύει $T=k\cdot\Delta\ell$, εδώ όμως $\Delta\ell=0$, οπότε η τάση του νήματος μηδενίζεται, πράγμα που σημαίνει ότι το νήμα αρχίζει να μην είναι τεντωμένο.



ii) Για όσο χρόνο το νήμα είναι τεντωμένο το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά D=k. Πράγματι στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπου, σε τελευταία ανάλυση, μπορούμε να πούμε ότι το ελατήριο ασκεί δύναμη (τη δύναμη του ελατηρίου), στο σώμα, μέσω του νήματος, την οποία ονομάσαμε τάση του νήματος. Οπότε στη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } T=mg \text{ ή } k\cdot d=mg \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση σε απομάκρυνση x, όπως στο σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F=w-T= mg-k(d+x) = mg-kd-kx=-kx$$

Το σώμα εκτελεί ΑΑΤ μέχρι τη θέση όπου βρίσκεται σε απομάκρυνση x=d, πάνω από τη θέση ισορροπίας και το ελατήριο είναι τεντωμένο. Από την ενέργεια ταλάντωσης παίρνουμε:

$$E=K+U \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}k4d^2=\frac{1}{2}kd^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2=3\frac{1}{2}kd^2 \ (2)$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας την αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την παραπέρα κίνηση του σώματος, μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος της βολής παίρνουμε:

$$K_\alpha+U_\alpha=K_\tau+U_\tau \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+0=0+mgh \text{ ή με βάση την (3)}$$

$$3\frac{1}{2}kd^2=mgh\rightarrow h=\frac{3kd^2}{2mg}\xrightarrow{(2)}h=1{,}5d$$

Συνεπώς το σώμα θα κινηθεί συνολικά προς τα πάνω κατά:

$$y=2d+d+1{,}5d=4{,}5d=45cm$$

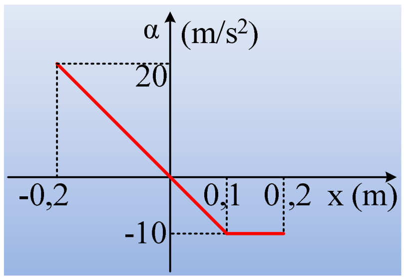
και δεν πρόκειται να συμπιέσει το ελατήριο, το οποίο στο μεταξύ, έχει αποκτήσει το φυσικό μήκος του.

Εξάλλου για την ΑΑΤ, ισχύει $\alpha=-\omega^2x$ ή $a=-\frac{k}{m}x$ (4)

Αλλά από την σχέση (1) παίρνουμε $\frac{k}{m}=\frac{g}{d}$ και η (5) γίνεται:

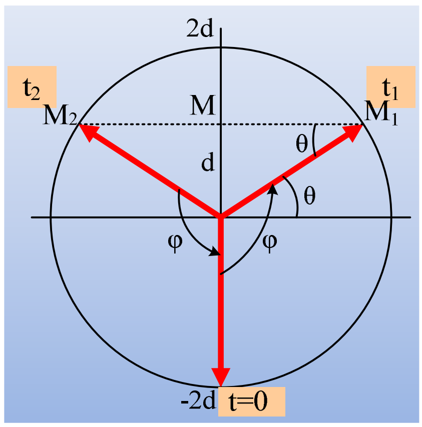
$$\alpha=\begin{cases}-\frac{g}{d}x=-100x \ \text{(S.I.) για } -0{,}2m\le x\le 0{,}1m\\ -g=-10m/s^2 \quad \text{για } 0{,}1m\le x<0{,}2m\end{cases}$$

Με γραφική παράσταση, αυτή του διπλανού σχήματος.



iii) Με βάση τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης το χρονικό διάστημα που θα κινηθεί το σώμα με τεντωμένο το νήμα, κινούμενο προς τα πάνω, είναι ίσο με το χρόνο, που ένα στρεφόμενο διάστημα θα διέγραφε τη γωνία φ στο διπλανό σχήμα. Αλλά η γωνία θ=30° (η απέναντι κάθετη είναι ίση με d, το μισό της υποτείνουσες 2d) συνεπώς:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}rad$$



Και ο χρόνος αυτός είναι:

$$t_1 = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{1}{3}2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}2\pi\sqrt{\frac{0{,}1}{10}}s \approx 0{,}21s$$

Με βάση το παραπάνω σχήμα, τόσο θα είναι και το χρονικό διάστημα που θα διαρκέσει και το μέρος της καθόδου, που είναι επίσης ΑΑΤ.

Εξάλλου για την κατακόρυφη βολή έχουμε $\Delta y = \upsilon_0 \cdot \Delta t - ½ g \cdot (\Delta t)^2$ (6) αλλά από την (2) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = 3\frac{1}{2}kd^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \upsilon_0 = d\sqrt{\frac{3k}{m}} = d\sqrt{\frac{3g}{d}} = \sqrt{3gd} = \sqrt{3\cdot 10\cdot 0{,}1}m/s = \sqrt{3}m/s$$

Τη στιγμή που το σώμα πέφτοντας τεντώνει το νήμα, (οπότε στη συνέχεια θα επιμηκύνει το ελατήριο), θα έχουμε Δy=0, οπότε από την σχέση (6):

$$\text{ή } \Delta t=0 \quad \text{ή } \Delta t = \frac{2\upsilon_0}{g} = \frac{2\sqrt{3gd}}{g} = 2\sqrt{\frac{3d}{g}} = 2\sqrt{\frac{3\cdot 0{,}1}{10}}s = 0{,}2\sqrt{3}s \approx 0{,}35s$$

Συνεπώς το σώμα, ξεκινά να επιμηκύνει το ελατήριο ξανά τη στιγμή $t_2=t_1+\Delta t$= 0,21s+0,35s=0,56s

Έτσι για την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος θα έχουμε:

α) Από 0- t_1 έχουμε $\upsilon=\omega\cdot A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{d}} = 10rad/s$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ αφού το σώμα ξεκινά την ταλάντωσή του από την ακραία θετική απομάκρυνσή του. Πράγματι η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι της μορφής $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, όπου για t=0, x=-A και με βάση τον κύκλο αναφοράς του παραπάνω σχήματος $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$. Συνεπώς:

$$\upsilon=2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Από t_1-t_2, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με επιτάχυνση –g και η ταχύτητα δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon=\upsilon_{\alpha\rho\chi}-g\cdot(t-t_1) = \sqrt{3}-10(t-0{,}21) \quad \text{(S.I.)}$$

Από την παραπάνω εξίσωση για t_2=0,56s βρίσκουμε $\upsilon_2 = -\sqrt{3}m/s$

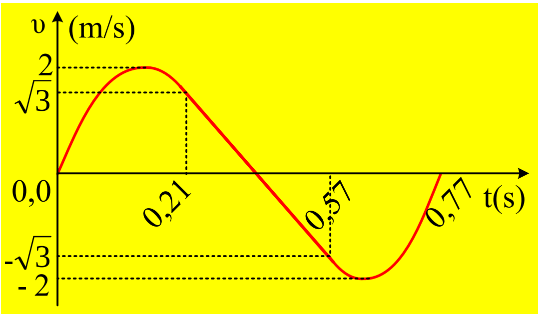
Εξάλλου, μόλις επιστρέφοντας αρχίζει να επιμηκύνει το ελατήριο, ξανά η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι της μορφής x= $A \cdot \eta\mu\left[\omega(t-t_2)+\varphi_2\right]$ όπου, με βάση τον κύκλο αναφοράς $\varphi_2=\frac{5\pi}{6}$ οπότε και η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι

$$\upsilon = A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\left[\omega(t-t_2)+\varphi_2\right] = 2\sigma\upsilon\nu\left[10(t-0{,}56)+\frac{5\pi}{6}\right] \quad \text{(S.I.)}$$

Συνεπώς για την ταχύτητα του σώματος έχουμε:

$$\upsilon = \begin{cases} 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(10t+\frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} & 0 \le t \le 0{,}21\text{s} \\ \sqrt{3}-10(t-0{,}21) \quad \text{(S.I.)} & 0{,}21\text{s} \le t \le 0{,}56\text{s} \\ 2\sigma\upsilon\nu\left[10(t-0{,}56)+\frac{3\pi}{2}\right] \quad \text{(S.I.)} & 0{,}56\text{s} \le t \le 0{,}77\text{s} \end{cases}$$

Με βάση όλα αυτά η γραφική παράσταση είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



dmargaris@sch.gr