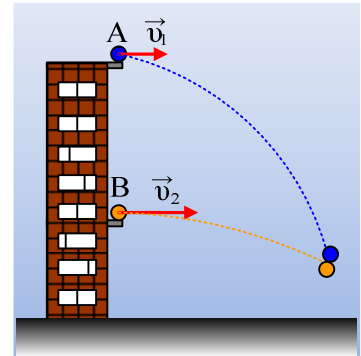


**Δεν υπάρχουν μόνο δύο άξονες!**

*Για τους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης*

Από την ταράτσα ενός ψηλού κτηρίου σε ύψος  $H=60\text{m}$  εκτοξεύεται οριζόντια μια μπάλα με ταχύτητα  $v_1=5\text{m/s}$ , τη στιγμή  $t=0$ . Μετά από λίγο, τη στιγμή  $t_1=2\text{s}$ , εκτοξεύεται επίσης οριζόντια μια δεύτερη μπάλα B, από ένα μπαλκόνι σε ύψος  $h=20\text{m}$ , με αποτέλεσμα οι δυο μπάλες να συγκρούονται, πριν φτάσουν στο έδαφος.



- i) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή και σε ποια θέση τα δύο σώματα συγκρούονται.
- ii) Ποια η αρχική ταχύτητα  $v_2$  της B μπάλας;

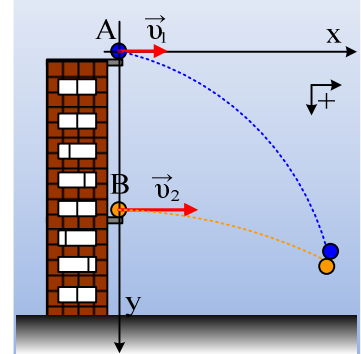
Οι απαντήσεις να δοθούν θεωρώντας αρχή των αξόνων:

- A) Την αρχική θέση της μπάλας A.
- B) Την αρχική θέση της μπάλας B.
- Γ) Το σημείο του εδάφους, που βρίσκεται στην κατακόρυφο που περνά από την αρχική θέση της A μπάλας.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα ενώ  $g=10\text{m/s}^2$ .

**Απάντηση**

A) Θεωρούμε το σύστημα αξόνων του διπλανού σχήματος. Προφανώς η A μπάλα ξεκινά την κίνησή της από την θέση  $(0,0)$ , ενώ η B από την θέση  $(0,40\text{m})$ . Θεωρώντας την κίνηση κάθε σώματος αποτελούμενη από μια θύγραμμη ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και μια ελεύθερη πτώση στην κατακόρυφη, έχουμε τις εξισώσεις:



	μπάλα A	μπάλα B.
Άξονας x	$v_{Ax}=v_1$ (1)	$v_{Bx}=v_2$ (5)
	$x=v_1t$ (2)	$x=v_2(t-t_1)$ (6)
Άξονας y	$v_y=gt$ (3)	$v_y=g(t-t_1)$ (7)
	$y= \frac{1}{2} gt^2$ (4)	$y=y_{oB}+ \frac{1}{2} g(t-t_1)^2$ (8)

Όπου  $t_1=2\text{s}$  η χρονική καθυστέρηση της B μπάλας και  $y_{oB}=40\text{m}$  η αρχική της θέση.

- i) Τη στιγμή της συνάντησης έχουμε  $y_A=y_B$  και με αντικατάσταση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} gt^2 &= y_{oB}+ \frac{1}{2} g(t-t_1)^2 \quad \text{ή} \\ \frac{1}{2} 10 \cdot t^2 &= 40+ \frac{1}{2} 10 \cdot (t-2)^2 \quad \text{ή} \\ t^2 &= 8+t^2-4t+4 \quad \text{ή} \\ t &= 3\text{s}. \end{aligned}$$

Οι δυο μπάλες δηλαδή θα συγκρουστούν τη στιγμή  $t=3\text{s}$ . Για την θέση σύγκρουσης εξάλλου έχουμε:

$$x=v_1t = 15\text{m} \text{ και } y= \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2\text{m}=45\text{m}$$

Δηλαδή σε ένα σημείο 15m δεξιά των σημείων εκτόξευσης και σε ύψος  $h=60m-45m=15m$ , από το έδαφος.

ii) Από την εξίσωση (6) παίρνουμε:

$$x=v_2(t-t_1) \rightarrow v_2 = \frac{x}{t-t_1} = \frac{15m}{3s-2s} = 15m/s$$

Β) Έστω το σύστημα αξόνων  $x,y$  του διπλανού σχήματος. Προφανώς τώρα η Α ξεκινά την κίνησή της από τη θέση  $y_{oA} = -40m$ . Οι εξισώσεις τώρα γράφονται:

	μπάλα Α	μπάλα Β.
Άξονας $x$	$v_{Ax}=v_1$ (1)	$v_{Bx}=v_2$ (5)
	$x=v_1t$ (2)	$x=v_2(t-t_1)$ (6)
Άξονας $y$	$v_y=gt$ (3)	$v_y=g(t-t_1)$ (7)
	$y=y_{oA} + \frac{1}{2}gt^2$ (4)	$y=\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$ (8)

i) Τη στιγμή της συνάντησης έχουμε  $y_A=y_B$  και με αντικατάσταση:

$$y_{oA} + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t-t_1)^2 \quad \text{ή}$$

$$-40 + \frac{1}{2}10 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t-2)^2 \quad \text{ή}$$

$$t=3s.$$

Για την θέση σύγκρουσης εξάλλου έχουμε:

$$x=v_1t=15m \text{ και } y=y_{oA} + \frac{1}{2}gt^2 = -40m + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2m = 5m$$

Δηλαδή σε ένα σημείο 15m δεξιά των σημείων εκτόξευσης και σε ύψος  $h=20m-5m=15m$ , από το έδαφος.

ii) Από την εξίσωση (6) παίρνουμε:

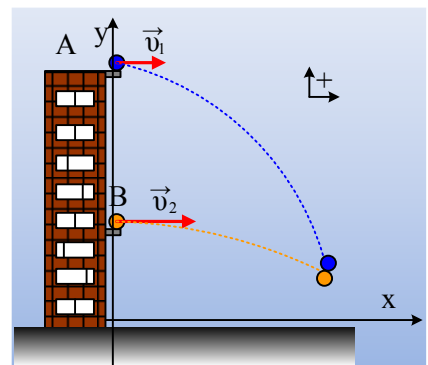
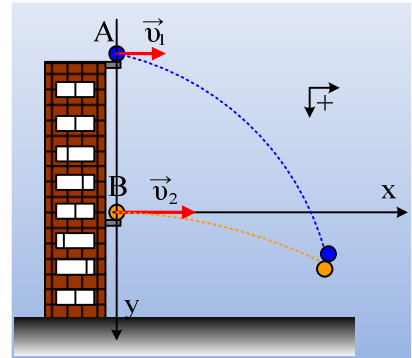
$$x=v_2(t-t_1) \rightarrow v_2 = \frac{x}{t-t_1} = \frac{15m}{3s-2s} = 15m/s$$

Γ) Έστω τώρα το σύστημα αξόνων του διπλανού σχήματος, όπου έχουμε αλλάξει και τον προσανατολισμό του άξονα  $y$ . Οι μπάλες Α και Β τώρα ξεκινούν από τις θέσεις  $(0,y_{oA})=(0,60m)$  και  $(0,y_{oB})=(0,20m)$  αντίστοιχα. Για την κίνησή τους ισχύουν:

	μπάλα Α	μπάλα Β.
Άξονας $x$	$v_{Ax}=v_1$ (1)	$v_{Bx}=v_2$ (5)
	$x=v_1t$ (2)	$x=v_2(t-t_1)$ (6)
Άξονας $y$	$v_y = -gt$ (3)	$v_y = -g(t-t_1)$ (7)
	$y=y_{oA} - \frac{1}{2}gt^2$ (4)	$y=y_{oB} - \frac{1}{2}g(t-t_1)^2$ (8)

i) Τη στιγμή της συνάντησης έχουμε  $y_A=y_B$  και με αντικατάσταση:

$$y_{oA} - \frac{1}{2}gt^2 = y_{oB} - \frac{1}{2}g(t-t_1)^2 \quad \text{ή}$$



$$60 - \frac{1}{2} 10 \cdot t^2 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t-2)^2 \text{ ή}$$

$$t=3s.$$

Για την θέση σύγκρουσης εξάλλου έχουμε:

$$x=v_1t=15m \text{ και } y=y_{0A}-\frac{1}{2}gt^2=60m-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3^2m=15m$$

Δηλαδή σε ένα σημείο 15m δεξιά των σημείων εκτόξευσης και σε ύψος  $h=15m$ , από το έδαφος.

ii) Όμοια από την εξίσωση (6) παίρνουμε:

$$x=v_2(t-t_1) \rightarrow v_2 = \frac{x}{t-t_1} = \frac{15m}{3s-2s} = 15m/s$$

[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)