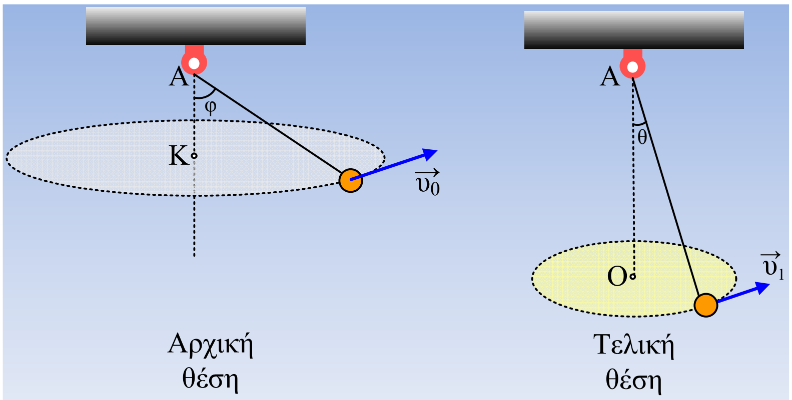
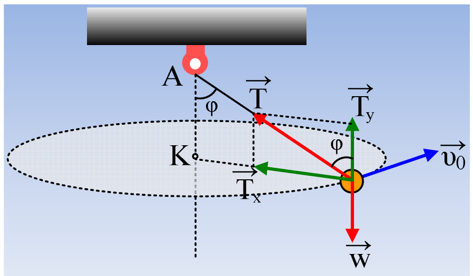
Ένα κωνικό εκκρεμές που … πέφτει.



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=200g κρέμεται στο άκρο νήματος μήκους L=1m. Θέτουμε σε περιστροφή τη σφαίρα, ώστε να διαγράφει οριζόντιο κύκλο κέντρου Κ, σε απόσταση (ΑΚ)=0,2m από το σημείο πρόσδεσης του νήματος Α. Εξαιτίας όμως της αντίστασης του αέρα, η ταχύτητα της σφαίρας μειώνεται, με αποτέλεσμα αυτή, να πέφτει σιγά-σιγά και μετά από λίγο, στρέφεται σε κύκλο κέντρου Ο, όπου η αντίστοιχη απόσταση είναι (ΑΟ)=0,9m. Να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, εξαιτίας της αντίστασης του αέρα, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην αρχική κυκλική τροχιά της. Για την γωνία φ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{(AK)}{L} = 0{,}2 \text{ και } \eta\mu\theta = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \sqrt{0{,}96}$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση το σώμα ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma F_y=0 \text{ ή } T_y-w=0 \text{ ή}$$

$$T\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=mg \rightarrow$$

$$T = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (1)$$

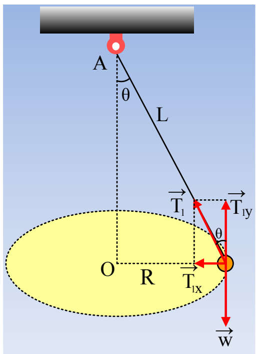
Ενώ η οριζόντια συνιστώσα της τάσης του νήματος, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

$$T_x = \frac{m\upsilon_0^2}{R} \rightarrow T\cdot\eta\mu\varphi = \frac{m\upsilon_0^2}{R} \rightarrow$$

$$\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\cdot\eta\mu\varphi = \frac{m\upsilon_0^2}{R} \rightarrow (2)$$

$$\upsilon_0^2 = \frac{gR}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu\varphi = \frac{gL\eta\mu\theta\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu\varphi = gL\frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \rightarrow$$

Κατά ανάλογο τρόπο, στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην τελική κυκλική τροχιά του (τελική όσον αφορά τη δική μας μελέτη, αφού τελικά το σώμα θα ηρεμήσει στην κατακόρυφη θέση).



$$\upsilon_1^2 = gL\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \rightarrow$$

Όπου $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(AO)}{L} = 0{,}9$ και $\eta\mu\theta = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \sqrt{0{,}19}$

Βλέπουμε εξάλλου ότι οι δύο κυκλικές τροχιές απέχουν κατακόρυφα κατά h=(AO)-(AK)=0,7m, οπότε για τις ενέργειες, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς κέντρου O, έχουμε:

$E_{\mu/\alpha\rho\chi}$=K+U= $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh$ και

$E_{\mu/\tau\epsilon\lambda}$=K+U= $\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$

Συνεπώς η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι:

$$\Delta E = E_{\mu/\alpha\rho\chi} - E_{\mu/\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgh - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}mgL\frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} + mgh - \frac{1}{2}mgL\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}0{,}2\cdot 10\cdot 1\cdot\frac{0{,}96}{0{,}2}J + 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}7J - \frac{1}{2}0{,}2\cdot 10\cdot 1\cdot\frac{19}{9}J \approx 6J$$

dmargaris@sch.gr