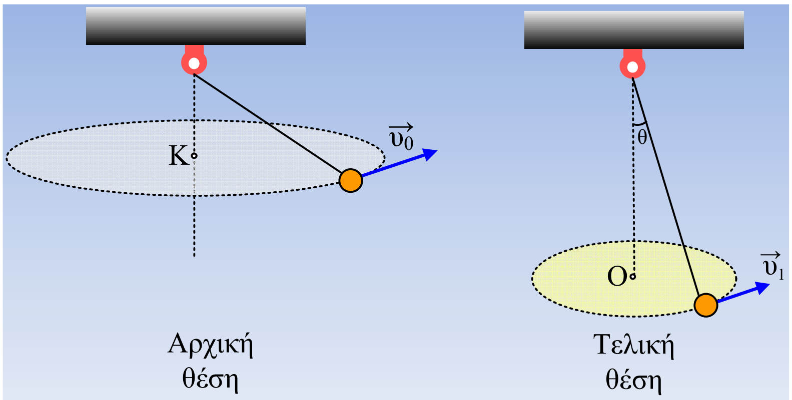
Ένα κωνικό εκκρεμές που … πέφτει.

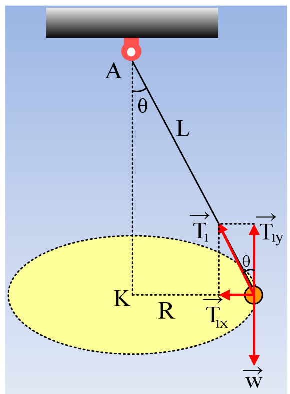


Μια μικρή σφαίρα μάζας m=200g κρέμεται στο άκρο νήματος μήκους L=1m. Περιστρέφουμε το σώμα, ώστε να διαγράφει οριζόντιο κύκλο, κέντρου Κ, με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=4\sqrt{3}$ m/s, όπως στο πρώτο σχήμα. Εξαιτίας όμως της αντίστασης του αέρα, η ταχύτητα της σφαίρας μειώνεται, με αποτέλεσμα αυτή, να πέφτει σιγά-σιγά και μετά από λίγο, στρέφεται σε κύκλο κέντρου Ο, όπου το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, όπου συνθ=0,9. Ζητούνται:

i) Το μέτρο της ταχύτητας υ_1 στην τελική τροχιά κέντρου Ο.

ii) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, εξαιτίας της αντίστασης του αέρα, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην τελική κυκλική τροχιά της (τελική όσον αφορά τη δική μας μελέτη, αφού τελικά το σώμα θα ηρεμήσει στην κατακόρυφη θέση).

Στην κατακόρυφη διεύθυνση η σφαίρα ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma F_y=0 \text{ ή } T_{1y}-w=0 \text{ ή}$$

$$T\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=mg \rightarrow$$

$$T_1=\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad (1)$$

Ενώ η οριζόντια συνιστώσα της τάσης του νήματος, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

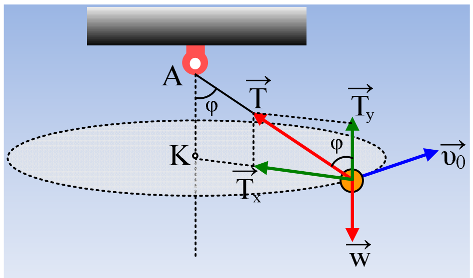
$$T_{1x}=\frac{m\upsilon_1^2}{R} \rightarrow T_1\cdot\eta\mu\theta=\frac{m\upsilon_1^2}{R} \rightarrow$$

$$\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\eta\mu\theta=\frac{m\upsilon_1^2}{R} \rightarrow (2)$$

$$\upsilon_1^2=\frac{gR}{\sigma\upsilon\nu\theta}\eta\mu\theta=\frac{gL\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}\eta\mu\theta=gL\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\upsilon_1=\sqrt{gL\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}=\sqrt{10\cdot 1\frac{1-0{,}9^2}{0{,}9}}m/s=\frac{\sqrt{19}}{3}m/s\approx 1{,}45m/s$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα στην αρχική κυκλική τροχιά της. Από την προηγούμενη σχέση (2) έχουμε:



$$\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\cdot\eta\mu\varphi=\frac{m\upsilon_0^2}{R}\rightarrow$$

$$g\cdot\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\upsilon_0^2}{L\eta\mu\varphi}\rightarrow$$

$$g\cdot\frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\upsilon_0^2}{L}\rightarrow g\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\upsilon_0^2}{L}\rightarrow$$

$$10\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\left(4\sqrt{3}\right)^2\rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi+4{,}8\sigma\upsilon\nu\varphi-1=0\rightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi=0{,}2$$

Αλλά $\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{(AK)}{L}\rightarrow(AK)=0{,}2m$

Ενώ αντίστοιχα $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{(AO)}{L}\rightarrow(AO)=0{,}9m$

Βλέπουμε ότι οι δύο κυκλικές τροχιές απέχουν κατακόρυφα κατά h=(AO)-(AK)=0,7m, οπότε για τις ενέργειες, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς κέντρου O, έχουμε:

$E_{\mu/\alpha\rho\chi}$=K+U= $\dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2+mgh$ και

$E_{\mu/\tau\varepsilon\lambda}$=K+U= $\dfrac{1}{2}m\upsilon_1^2$

Συνεπώς η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι:

$$\Delta E=E_{\mu/\alpha\rho\chi}-E_{\mu/\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+mgh-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2\rightarrow$$

$$\Delta E=\frac{1}{2}0{,}2\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2J+0{,}2\cdot10\cdot0{,}7J-\frac{1}{2}0{,}2\cdot\frac{19}{9}J\approx6J$$

dmargaris@sch.gr