ΑΝΔΡΕΣΑΚΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

Η περιπέτεια της Γεωμετρίας.

Εάν αναζητούσαμε σε κάποιο ερμηνευτικό λεξικό έναν ορισμό για την κλασική Γεωμετρία η απάντηση θα ήταν ότι αποτελεί εκείνο τον κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με την μελέτη του χώρου και των σχημάτων, καθώς και την μελέτη των ιδιοτήτων, των μετρήσεων, και των σχέσεων μεταξύ σημείων, γραμμών, γωνιών και γενικά επιπέδων και στερών σχημάτων.

Όμως η Γεωμετρία δεν είναι μόνον αυτό. Αποτελεί τον πιο θεμελιώδη κλάδο της μαθηματικής επιστήμης καθώς η εισαγωγή της στην θεωρητική της μορφή από τον Ευκλείδη, άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που απόκτησε μορφή επιστήμης, και για πολλούς αιώνες ήταν και ο μοναδικός κλάδος μέ αυτήν την ιδιότητα. Από την άλλη πολλές επιστήμες θεμελιώθηκαν πάνω στις βάσεις που έθεσε η Ευκλείδεια Γεωμετρία, κάνοντας χρήση της *παραγωγικής συλλογιστικής* και της *απόδειξης* που εισήχθη μέσω αυτής.

Ακόμη όμως και όταν τον $19^{ο}$ αιώνα τα θεμέλια της Γεωμετρίας κλονίστηκαν, με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η αναταραχή πού ακολούθησε στην μαθηματική κοινότητα είχε ως αποτέλεσμα την απελευθέρωση όχι μόνο της ίδιας της Γεωμετρίας από το βάρος της ακριβούς περιγραφής του χώρου, αλλά και του συνόλου της μαθηματικής επιστήμης από το βάρος της «*απόλυτης αλήθειας*» που εξέφραζε. Αυτό με την σειρά του είχε ως αποτέλεσμα την αλλαγή της πορείας αλλά και της θεώρησης της μαθηματικής επιστήμης, δίνοντας τα σπουδαία αποτελέσματα και εφαρμογές που παράγουν οι νέοι κλάδοι των μαθηματικών που αναπτύχθηκαν εξ αυτού, όπως για παράδειγμα η θεωρία της σχετικότητας.

Η Γεωμετρία λοιπόν αποτέλεσε και στις εύκολες και στις δύσκολες στιγμές της καταλύτη εξελίξεων για τα μαθηματικά. Αξίζει λοιπόν να κάνουμε μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην πορεία της Γεωμετρίας, να σταθούμε στα ορόσημα αυτής και να μελετήσουμε την φιλοσοφία της από την γέννηση της έως σήμερα Αυτό είναι και το αντικείμενο αυτής της εργασίας.

<u>Σύντομη Ιστορική Αναδρομή</u>
(από την χαραυγή της ιστορίας έως τα στοιχεία του Ευκλείδη).

Η Γεωμετρία όπως φανερώνει και η λέξη, γεννήθηκε από την ανάγκη μέτρησης σχημάτων και γενικότερα επίλυσης πρακτικών προβλημάτων, όπως στην γεωργία, στις κατασκευές και στην αστρονομία. Η αρχική μορφή της ήταν μια συλλογή εμπειρικών κανόνων που σχετίζονταν με μήκη, γωνίες, όγκους και εμβαδά σχημάτων.

Οι ρίζες της Γεωμετρίας εντοπίζονται σε κάποιες αναπτυγμένες κοινωνίες της Ανατολής περίπου από τον **5ο έως τον 2ο αιώνα π.Χ**. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι, Ινδοί και Κινέζοι είναι από τους πρώτους που ανάπτυξαν τη Γεωμετρία στην πρακτική της μορφή. Όλοι αυτοί οι πολιτισμοί αναπτύχθηκαν κοντά σε μεγάλα ποτάμια (Ευφράτης, Νείλος, Ινδός, Γάγγης) και οι συχνές πλημμύρες κατέστρεφαν τα όρια των αγρών. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη από την μία να επανακαθοριστούν τα όρια των αγρών και από την άλλη να κατασκευαστούν αρδευτικά έργα ώστε να ελεγχθούν οι πλημμύρες.

Μελετώντας τα σωζόμενα από εκείνη την εποχή κείμενα, όπως τον *πάπυρο του Rhid*, τον *πάπυρο της Μόσχας*, αλλά και τις *πλάκες αργίλου* που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι, παρατηρήθηκε ότι οι πολιτισμοί αυτοί είχαν αναπτύξει σημαντικό όγκο γνώσεων σχετικά με την Γεωμετρία, που συνίστατο κυρίως στην "*αλγοριθμική επίλυση*" διαφόρων προβλημάτων, που εφαρμόζονταν μόνο για τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές του εκάστοτε προβλήματος.

Όλα αυτά αποτελούσαν μια συλλογή εμπειρικών μεθόδων αναγκαίων για την εκτέλεση έργων και διαδικασιών που θα βοηθούσαν στην κοινωνική, πολιτικοοικονομική και πολιτιστική ανάπτυξή τους, χωρίς να εμπεριέχεται κάποια λογική εξήγηση του τρόπου επίλυσης ούτε η σχηματοποίηση της λύσης σε μορφή κανόνα. Αυτό που σήμερα ονομάζουμε "*απόδειξη*" δεν το συναντάμε στη Γεωμετρία των Βαβυλωνίων ή των αρχαίων Αιγυπτίων, και άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Γεωμετρία που χρησιμοποίησαν αυτοί οι λαοί δεν ήταν αυτό που θεωρούμε σήμερα Γεωμετρία, ως έναν ιδιαίτερο μαθηματικό κλάδο. Αντιμετωπίζεται από αυτούς λαούς όπως κάθε άλλη μορφή αριθμητικής σχέσης μεταξύ μεγεθών, και είναι γνωστό ότι στο κομμάτι της αριθμητικής οι λαοί αυτοί είχαν φτάσει σε πολύ αξιόλογο επίπεδο. Η Γεωμετρία με αυτήν την μορφή διήρκησε αρκετούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί σημαντική πρόοδος.

Ο πρώτος λαός που ίδρυσε κι ανάπτυξε τη Θεωρητική Γεωμετρία ως αποδεικτική Επιστήμη, ήταν οι αρχαίοι Έλληνες. Αυτοί εισήγαγαν και ανάπτυξαν την *αποδεικτική διαδικασία* και την *παραγωγική συλλογιστική*. Θεμελίωσαν και δόμησαν τη Γεωμετρία και δημιούργησαν την **"Ευκλείδεια Γεωμετρία"**, την οποία οι περισσότεροι μελετητές, ακόμα και σήμερα, θεωρούν ως έναν από τους κλάδους των Μαθηματικών και των επιστημών γενικότερα, που είναι υποδειγματικά θεμελιωμένος.

Ο **Θαλής** περί το πρώτο μισό του 6ου π.Χ. αιώνα είναι ο πρώτος μαθηματικός ο οποίος κάνει χρήση της *παραγωγικής συλλογιστικής* για να αποδείξει κάποιες μαθηματικές προτάσεις. Συγκεκριμένα :

- **ο κύκλος διχοτομείται από τη διάμετρό του.**
- **οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.**
- **οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.**

- **δύο τρίγωνα είναι ίσα εάν έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες μία προς μια ίσες.**
- **το Θεώρημα των ανάλογων τμημάτων, με το οποίο υπολόγισε το ύψος της πυραμίδας από το μήκος της σκιάς της κτλ.**

Ο Θαλής ενδεχομένως να άντλησε πολλές από τις γεωμετρικές του γνώσεις από τα ταξίδια του στην Αίγυπτο, καθώς πολλές από τις προτάσεις που απέδειξε, υπήρχαν στα Αιγυπτιακά Μαθηματικά. Το γεγονός όμως ότι είναι ο πρώτος που αποδεικνύει αυτές τις προτάσεις, θα μπορούσε να τον χαρακτηρίσει ως ιδρυτή της Θεωρητικής Γεωμετρίας.

Επόμενος μεγάλος Γεωμέτρης είναι ο **Πυθαγόρας** (572-497 π.Χ.), ο οποίος συνέχισε την θεωρητικοποίηση της γεωμετρίας που είχε ξεκινήσει ο Θαλής. Ο Πυθαγόρας καθόρισε βασικές γεωμετρικές έννοιες, εισήγαγε νέες προτάσεις και βελτίωσε την αποδεικτική διαδικασία που είχε εισαγάγει ο Θαλής. Η Πυθαγόρεια αδελφότητα που ίδρυσε αποτελεί ίσως το πρώτο σχολείο παραγωγής λογικών συμπερασμάτων. Αυτός εξέτασε τις αρχές της Γεωμετρίας και διερεύνησε τα θεωρήματα με καθαρά θεωρητικό τρόπο "αΰλως και νοερώς" όπως λέει ο **Εύδημος**, ο οποίος μάλιστα αναφέρει επίσης ότι ο Πυθαγόρας και ο **Ιπποκράτης ο Χίος** ήταν οι πρώτοι που προσπάθησαν να παρουσιάσουν την Γεωμετρία ως μια σειρά από αποδεικνυόμενες προτάσεις βασιζόμενοι σε αρχικούς ορισμούς και υποθέσεις.

Τα στοιχεία του Ευκλείδη.

Γύρω στο 300 π.Χ. γράφονται τα **"Στοιχεία"** του **Ευκλείδη** (330-250 π.Χ.), που αποτελεί ένα έργο - σταθμό στην ιστορία των Μαθηματικών και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους. Ο Ευκλείδης συγκέντρωσε όλα τα γνωστά έργα των παλαιότερων μαθηματικών, ταξινόμησε την ύλη, τη βελτίωσε, τη συμπλήρωσε, την ανάπτυξε και την τοποθέτησε σε μια ιεραρχημένη σειρά. Το έργο αυτό χρησιμοποιήθηκε για πολλούς αιώνες ως βασικό κείμενο διδασκαλίας της Γεωμετρίας, και χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, ενώ ως προς τον αριθμό εκδόσεων και μεταφράσεων υπολείπεται μόνο της Αγίας Γραφής.

Η Γεωμετρία από μελέτη των σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, αποδεικνύοντας τις σχέσεις μεταξύ τους, ξεκινώντας από τον ορισμό βασικών γεωμετρικών εννοιών (**ορισμοί**) και παραθέτοντας προτάσεις που μπορούν να γίνουν αμέσως παραδεκτές (**αξιώματα**). Όλες οι υπόλοιπες **προτάσεις** αποδεικνύονται με την βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προηγουμένων προτάσεων και την χρήση της παραγωγικής συλλογιστικής και της απόδειξης (**αξιωματική μέθοδος**).

Το περίφημο αυτό έργο του Ευκλείδη δεν αναφέρεται μόνο στην Γεωμετρία. Αποτελείται από **13 βιβλία**. Στα **6** πρώτα εξετάζεται η **επιπεδομετρία** (επίπεδη γεωμετρία), στο **7^{ο} , 8^{ο} , 9^{ο} η θεωρία των αριθμών**, στο **10^{ο}** η θεωρία των **ασύμμετρων λόγων** και στα 3 τελευταία (**11^{ο} , 12^{ο}, 13^{ο}**) η **στερεομετρία**.

Η θεμελίωση της Γεωμετρίας γίνεται στο **1^{ο}** βιβλίο, με αφετηρία **23 ορισμούς** γεωμετρικών εννοιών και **10 αξιώματα** (**5 αιτήματα** και **5 κοινές έννοιες**). Οι **κοινές έννοιες** είναι αλήθειες που ισχύουν σε κάθε αποδεικτική επιστήμη (για παράδειγμα *δύο αντικείμενα ίσα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα*), ενώ τα **αιτήματα** είναι αλήθειες που ισχύουν ειδικά στη Γεωμετρία. Σήμερα, δεν υπάρχει μια ανάλογη διάκριση μεταξύ των θεμελιωδών προτάσεων μιας σύγχρονης θεωρίας.

Τα 5 αιτήματα έθεσε ο Ευκλείδης είναι τα εξής:

1. ***Από κάθε σημείο άγεται ευθεία γραμμή προς κάθε σημείο***
2. ***Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί συνεχώς να προεκτείνεται ευθυγράμμως***
3. ***Μπορεί να γραφτεί κύκλος με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα***
4. ***Όλες οι ορθές γωνίες να είναι ίσες μεταξύ τους***
5. ***Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και αν οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται, έχουν άθροισμα μικρότερο των 2 ορθών, τότε οι δύο ευθείες, αν προεκταθούν απεριόριστα, θα τμηθούν στο μέρος εκείνο του επιπέδου ως προς την αρχική ευθεία, όπου σχηματίζονται οι γωνίες με άθροισμα μικρότερο των 2 ορθών.***

Στα 3 πρώτα ζητείται απλά να γίνει δεκτή η δυνατότητα κατασκευής και επομένως ύπαρξης, των τριών θεμελιωδών γεωμετρικών σχημάτων: του ευθύγραμμου τμήματος, της ευθείας και του κύκλου.

Το 4^{ο} και το 5^{ο} αίτημα όμως διαφέρουν από τα τρία πρώτα. Ζητούν να δεχτούμε όχι μόνο την ύπαρξη αλλά και ιδιότητες κάποιων σχημάτων. Το 4^{ο} αίτημα θα μπορούσε να παραληφθεί, καθώς η απόδειξή του με την μέθοδο της μετατόπισης θα μπορούσε να το μετατρέψει σε πρόταση. Δεν είναι τυχαίο ότι το παρουσιάζει ο Ευκλείδης πριν από το " περίεργο" 5^{ο} αίτημα. Το 5^{ο} αίτημα (ή όπως αργότερα αποκαλέστηκε, το *αίτημα της παραλληλίας*) έχει τη μορφή μιας **πρότασης** με υπόθεση, είναι αρκετά περίπλοκο και ένα συμπέρασμα που δεν είναι αυταπόδεικτο.

Μελετώντας προσεκτικά τα "Στοιχεία" φαίνεται ότι και ο ίδιος είχε κάποιους ενδοιασμούς για τη θέση του 5^{ου} αιτήματος μέσα στην πραγματεία του. Πράγματι, ο Ευκλείδης απέφυγε να χρησιμοποιήσει το αίτημα αυτό και προσπαθεί να αποδείξει όσες προτάσεις περισσότερες μπορεί χωρίς τη βοήθεια του (28 προτάσεις ανάμεσα στις οποίες και το αντίστροφο του αιτήματος). Επίσης, έχει παρατηρηθεί ότι ο Ευκλείδης σε πολλές αποδείξεις έχει δεχθεί σιωπηρά κάποιες υποθέσεις (όπως για παράδειγμα ότι η ευθεία γραμμή επεκτείνεται απεριόριστα, το οποίο δεν συνάγεται από το 2^{ο} αίτημα), ενώ θα μπορούσε να τις είχε εισάγει ως αξιώματα.

Παρόλα τα μειονεκτήματα που στην πορεία ανακαλύφθηκαν, ότι παρουσιάζουν ορισμένα κομμάτια των "Στοιχείων", αυτά αποτέλεσαν ένα πρότυπο θεωρητικό και επιστημονικό έργο με την σημαντικότερη συμβολή στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης.

Η έκδοση των "Στοιχείων" σφράγισε, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο όπως θα δούμε παρακάτω, το έργο των μεταγενέστερων του Ευκλείδη μαθηματικών.

Η Γεωμετρία από τη Ελληνιστική περίοδο ως τον 19ο αιώνα.

Ο **Αρχιμήδης** (277-212 π.Χ.), με εμφανείς τις επιρροές από τον Ευκλείδη, έδωσε σπουδαία έργα και στην Γεωμετρία ("Περί σφαίρας και κυλίνδρου", "Μέτρηση του κύκλου", κ.ά.) και στην Μηχανική και στην υδροστατική, χρησιμοποιώντας και τελειοποιώντας την αποδεικτική μέθοδο. Συνεχιστές των παραπάνω σπουδαίων Γεωμετρών υπήρξαν και οι **Κλαύδιος Πτολεμαίος**, **Απολλώνιος**, **Ερατοσθένης**, **Ήρωνας** και **Πάππος**. Παράλληλα όμως με την αξιοποίηση της τεράστιας κληρονομιάς τους Ευκλείδη, άρχισε και μια διαδικασία - αποτυχημένων- προσπαθειών απόδειξης του 5ου αιτήματος, ως συνέπεια των προηγουμένων αιτημάτων, δείχνοντας ότι αποτελούσε αντικείμενο έντονης κριτικής.

Χαρακτηριστικό είναι τα παραδείγματα του **Κλαυδίου Πτολεμαίου** (περίπου 1500 μ.Χ) και του **Πρόκλου** (στον οποίο οφείλεται η διάσωση των «Στοιχείων» διαμέσου του σχολιασμού τους). Ο Πρόκλος που έζησε τον 5ο αιώνα μ.Χ., αρνείται να συμπεριλάβει το 5ο αίτημα, ανάμεσα στα αξιώματα, θεωρώντας αδύνατο να μην δέχεται απόδειξη μια πρόταση, της οποίας η αντίστροφη μπορεί να αποδειχτεί.

Στους επόμενους αιώνες η Γεωμετρία δεν γνώρισε σημαντική ανάπτυξη αν και έγιναν αξιόλογες προσπάθειες ιδίως από τους μαθηματικούς του αραβικού κόσμου .Ο **Al Mahani** (853 μ.Χ.) συνέλαβε την ιδέα μεταφοράς γεωμετρικών προβλημάτων σε αλγεβρικά, ο **Omar Khayam** (1084 μ.Χ-1131 μ.Χ.) βρήκε γεωμετρικές λύσεις σε κυβικές εξισώσεις και ασχολήθηκε συστηματικά με το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη συμβάλλοντας και αυτός στην νέα εποχή που πλησίαζε για την Γεωμετρία. Τέλος σημαντική ήταν και η προσπάθεια του Πέρση αστρονόμου και μαθηματικού **Nasir-ed-din** (1201 – 1274) ο οποίος έκανε και αυτός μια προσπάθεια απόδειξης του περίφημου αιτήματος.

Μετά την Αναγέννηση αναζωπυρώθηκε το ενδιαφέρον για το έργο του Ευκλείδη, ειδικά μετά την έκδοση, το 1533, της μετάφρασης των σχολίων του Πρόκλου για το 1ο βιβλίο του Ευκλείδη. Χαρακτηριστική είναι η προσπάθεια του Άγγλου μαθηματικού **John Wallis** (1616-1703), που προσέθεσε άλλη μια αποτυχημένη προσπάθεια στον βωμό του αιτήματος της παραλληλίας.. Ταυτόχρονα όμως συνέβησαν εκείνη την εποχή δυο πολύ σημαντικές καινοτομίες στην Γεωμετρία.

Η πρώτη ήταν η εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων (αναλυτική γεωμετρία) από τους **Descartes** (1596- 1650) και **Fermat** (1601- 1665). Η νέα μορφή αυτή της Γεωμετρίας είναι αποτέλεσμα της σύνθεσής της με την ραγδαία αναπτυσσόμενη τότε Άλγεβρα και την Ανάλυση, που βρισκόταν σε αρχικό στάδιο. Η επίδραση και η σπουδαιότητα αυτής της νέας Γεωμετρίας ήταν τεράστια. Κάθε γεωμετρική πρόταση μπορεί να "μεταφραστεί" σε αλγεβρική και η απόδειξη να γίνει με τον πιο "βατό" αλγεβρικό τρόπο. Η νέα αυτή μέθοδος απελευθέρωσε την σκέψη των μαθηματικών και συνέβαλε τόσο στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού όσο και της φυσικής.

Η δεύτερη σημαντική επινόηση εκείνης της εποχής ήταν η ανάπτυξη της προβολικής γεωμετρίας, από τον **Desargues** (1591-1661), που ασχολείται με τις ιδιότητες και την απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο δια μέσου προβολών. Αποτελεί μια μη μετρική μορφή της Γεωμετρίας και αναδείχτηκε σαν κλάδος των μαθηματικών αργότερα , μέσα από τις εργασίες του **Poncelet.** Ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία της προβολικής Γεωμετρίας είναι η αρχή του δυισμού, σύμφωνα με την οποία υπάρχει μια δυικότητα ανάμεσα σε δυο θεωρήματα ή οποία επιτρέπει να μετασχηματιστεί το ένα αυτόματα στο άλλο..

Όλο αυτό το χρονικό διάστημα όμως στις εργασίες διαφόρων μαθηματικών συνεχιζόταν η προσπάθεια απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη, χωρίς όμως επιτυχία. Η αποτυχία αυτών των προσπαθειών, οφειλόταν κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι γίνονταν *σιωπηρές παραδοχές* προτάσεων που ήταν ισοδύναμες με το Ευκλείδειο αίτημα. Οι εργασίες αυτές στηρίζονταν είτε στην προσπάθεια απόδειξης του αιτήματος παραλληλίας από τα υπόλοιπα αξιώματα είτε στην αντικατάστασή του από κάποια άλλη ισοδύναμη πρόταση περισσότερη φανερή, και ίσως πιο κοντά στην ανθρώπινη διαίσθηση, η οποία να αποδεικνυόταν πιο εύκολα. Μια τέτοια ισοδύναμη πρόταση είναι και αυτή η οποία διδάσκεται στα σχολικά εγχειρίδια και οφείλεται στο Άγγλο μαθηματικό **Playfair** (1748-1819) : "*Από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε μόνο μια παράλληλη προς αυτήν*".

Έτσι, μετά την αποτυχία των άμεσων μεθόδων, από κάποιους μαθηματικούς το ενδιαφέρον στράφηκε προς την δυνατότητα μιας έμμεσης απόδειξής του με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Η άρνηση δηλαδή του 5^{ου} αιτήματος να οδηγήσει σε μια αντίφαση και επομένως αυτή η αντίφαση να εδραιώσει την θέση του ως αίτημα. Μια σημαντική προσπάθεια προς αυτήν την κατεύθυνση ήταν αυτή του Ιταλού **Saccheri** (1667-1733), καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Πάβιας. Ο Saccheri χρησιμοποιώντας το ***δισορθογώνιο τετράπλευρο*** (ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με τις γωνίες Α και Β ορθές και τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ ίσες , θα έχει τις γωνίες Γ και Δ ίσες. Οπότε είτε θα είναι και οι δύο ορθές – Ευκλείδειο αίτημα – είτε και οι δύο οξείες είτε και οι δύο αμβλείες). Ξεκινώντας από υποθέσεις αντίθετες από το Ευκλείδειο αίτημα (υπόθεση *οξείας γωνίας* και υπόθεση *αμβλείας γωνίας*) ανέπτυξε τις συνέπειές τους προσδοκώντας να φτάσει σε αντιφάσεις. Η υπόθεση της αμβλείας γωνίας όντως κατέληξε σε αντίφαση και την απέρριψε, κάτι που δεν κατάφερε με την υπόθεση της οξείας γωνίας παρά τα "περίεργα" αποτελέσματα που είχε καταλήξει. Η πίστη του Saccheri στην Γεωμετρία του Ευκλείδη ήταν όμως τόσο δυνατή ώστε αυτά τα "περίεργα" αποτελέσματα που είχε καταλήξει τα θεώρησε ότι καθώς αντίκεινται στην κοινή διαίσθηση, αυτό αποτελούσε και αντίφαση. Δυστυχώς, ο ίδιος απέτυχε να συλλάβει τις τεράστιες συνέπειες της προσπάθειάς του.

Αντίστοιχες σημαντικές προσπάθειες, κάνοντας χρήση της απαγωγής σε άτοπο, έκαναν οι **Lambert** (1728- 1777) και **Legendre** (1752 – 1833). Και οι δύο δούλεψαν πάνω στο πλαίσιο που είχε θέσει ο Saccheri και κατέληξαν σε σημαντικές παρατηρήσεις και αποτελέσματα χωρίς όμως ούτε και αυτοί να κάνουν την υπέρβαση βρίσκοντας αντίφαση στην υπόθεση της οξείας γωνίας. Ο Legendre το κύριο μέρος των προσπαθειών του για απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος μαζί με μια σημαντική ανακατάταξη και απλοποίηση των προτάσεων των στοιχείων του Ευκλείδη, τα κατέγραψε στο βιβλίο του "*Elements de Geometry*" (Στοιχεία Γεωμετρίας). Το έργο αυτό αποτέλεσε για πολλά χρόνια πρότυπο στοιχειώδους εγχειριδίου, μεταφράστηκε και διδάχθηκε στην Αμερική, με αποτέλεσμα την αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος για το αίτημα παραλληλίας.

Οι περισσότεροι από τούς επιστήμονες αυτής της εποχής που εργάστηκαν πάνω στο $5^{ο}$ αίτημα, ήταν τόσο πεπεισμένοι για την ανεξαρτησία του από τα υπόλοιπα 4, και τόσο σίγουροι για την απόλυτη και μοναδική αλήθεια πού πρέσβευε η Ευκλείδεια Γεωμετρία (κάτι στο οποίο συνέβαλε και το γενικότερο επιστημονικό πνεύμα της εποχής), ώστε δεν έδωσαν τόση σημασία στις εναλλακτικές προτάσεις που προέκυψαν από το έργο τους. Δεν μπόρεσαν να συλλάβουν ότι ή άρνηση του $5^{ου}$ Ευκλείδειου αιτήματος , μαζί με τα υπόλοιπα 4, θα έδινε μια νέα, συνεπή Γεωμετρία, η οποία απλά θα διέφερε από αυτήν του Ευκλείδη. Και αυτό ήταν κάτι που δεν θα αργούσε να συμβεί.

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Έναν περίπου αιώνα μετά τον Saccheri και βασιζόμενοι σε μια παραλλαγή της προσέγγισής του τέσσερεις σπουδαίοι επιστήμονες, ο **Gauss** (1777 – 1855), ο Ούγγρος **Bolyai** (1802 – 1860) ο Ρώσος **Lobatchevski** (1793 – 1856) και ο Γερμανός **Riemman**(1826-1866) έφτασαν στο συμπέρασμα ότι η άρνηση του 5ου αιτήματος μπορεί να οδηγήσει σε μια λογικά συνεπή θεωρία που ονομάστηκε ***μη Ευκλείδεια Γεωμετρία***. Με τις εργασίες τους έμελε να σφραγίσουν την ιστορία της Γεωμετρίας .

Οι τρείς εξ αυτών των μαθηματικών (Gauss, Bolyai, Lobatchevski) ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον προσέγγισαν το αίτημα στην μορφή που το είχε θέσει ο Playfair διατυπώνοντας την ισοδυναμία, ότι αν από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία, καμία, περισσότερες από μία, παράλληλες προς αυτήν αυτά είναι ισοδύναμα με την υπόθεση της ορθής της αμβλείας και της οξείας γωνίας αντίστοιχα, και εργαζόμενοι πάνω στις τρείς αυτές περιπτώσεις.

Ο πρώτος που κατανόησε το γεγονός ότι η γεωμετρία της φύσης μπορεί να είναι διαφορετική από την Ευκλείδεια ήταν ο **Gauss** ο οποίος πέρα από τα αποσπάσματα των επιστολών του, δεν άφησε δυστυχώς κάποιο συστηματικό έργο πάνω στη **μη Ευκλείδεια Γεωμετρία** (όπως ο ίδιος την ονόμασε) που είχε συλλάβει. Ένας λόγος γι αυτό είναι ότι δεν ήθελε ίσως να διακινδυνεύσει το μεγάλο κύρος του στην αναπόφευκτη αντιπαράθεση με την φιλοσοφία του **Kant** (το κατεστημένο της εποχής του), που είχε βασική αρχή της την Ευκλείδεια δομή και αντίληψη του χώρου.

Περί το 1830 δημοσιεύτηκαν σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, τα δύο πρώτα ολοκληρωμένα έργα μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι συγγραφείς τους, ο **Lobatchevski**, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Καζάν, και ο Ούγγρος στρατιωτικός **Bolyai**, που αναγνωρίζονται γενικά σαν οι δημιουργοί της **μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας**.

Ο Bolyai, που η εργασία του δημοσιεύτηκε ως παράρτημα σε ένα βιβλίο του επίσης μαθηματικού πατέρα του το 1832, ενδιαφερόταν για αυτό που ο ίδιος αποκαλούσε “απόλυτη” Γεωμετρία. Ήταν ένα σύστημα αποτελούμενο από τα 4 πρώτα αιτήματα και τις προτάσεις που ήταν ανεξάρτητες από το αίτημα της παραλληλίας και οι οποίες στέκουν και στην Ευκλείδεια και στην νέα Γεωμετρία.

Ο Lobatchevski δημοσίευσε τις έρευνές του στα 1830 και καθώς ήταν γραμμένη στην μητρική του γλώσσα δεν κίνησε το ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας.. Αυτός όμως συνέχισε τις εκδόσεις και δημοσιεύσεις του έργου του ως το 1855 με τους τίτλους “Φανταστική γεωμετρία” και “Πανγεωμετρία” και στόχο να γίνει γνωστή η εργασία του. Σχετικά με το αξίωμα τουPlayfair το αντίστοιχο της Γεωμετρίας του Lobatchevski (υπερβολική Γεωμετρία) είναι ότι “*από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται δύο τουλάχιστον ευθείες παράλληλες προς αυτήν*.”

Οι Γεωμετρίες που εισήγαγαν οι Bolyai – Lobatchevski διαφέρουν από την Ευκλείδεια μόνο στην απόρριψη του $5^{ου}$ αιτήματος . Αυτή όμως η διαφοροποίηση δίνει βαθιές αλλαγές στην λογική και την διαίσθηση της γεωμετρίας, όπως την ξέρουμε. Για παράδειγμα στην Γεωμετρία του Lobatshevski το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από 180 μοίρες ή το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ανάλογο με το πόσο υπολείπεται από τις 180 μοίρες το άθροισμα των γωνιών του κ.τ.λ.

Τα συμπεράσματα στα οποία οδηγήθηκαν, βρισκόταν πράγματι σε ασυμφωνία με τη διαίσθηση, αλλά ο Lobatchevski και ο Bolyai είχαν συνειδητοποιήσει μια μεγάλη αλήθεια: αυτό που βρίσκεται σε αντίθεση με το καθιερωμένο για το χώρο δεν είναι κατ' ανάγκη λογικά αντιφατικό και επομένως μπορούμε να το επεξεργαστούμε θεωρητικά. Το έργο των Gauss - Lohatchevski - Bolyai οδήγησε στα εξής συμπεράσματα:

- Το Ευκλείδειο αίτημα είναι αδύνατο να αποδειχτεί, αφού η άρνηση του δεν οδηγεί σε κάποια λογική αντίφαση.

- Με την προσθήκη της αντίθετης πρότασης στα αξιώματα της Γεωμετρίας είναι δυνατό να δημιουργηθεί μια λογικά άψογη και κατανοητή Γεωμετρία, διαφορετική από την Ευκλείδεια.

Αποτέλεσμα της εμφάνισης της νέας γεωμετρίας, ήταν η προώθηση ιδεών που οδήγησαν σε μια από τις μεγαλύτερες μαθηματικές δημιουργίες του 19ου αιώνα, τη Γεωμετρία του Riemann. Ο Γερμανός μαθηματικός **Riemann** ήρθε να στηρίξει, αλλά και να επεκτείνει τις νέες ιδέες, απ' τη μια μεριά με τις μελέτες του για την Ελλειπτική Γεωμετρία ("*από σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχουν ευθείες που να διέρχονται από αυτό και να είναι παράλληλες προς αυτήν*"), και απ' την άλλη με τη γενίκευση των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών (σύγχρονη θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων). Η μη Ευκλείδεια γεωμετρία του Riemann είναι περισσότερο μαθηματική δημιουργία. Ο Riemann επίσης βρήκε και άλλο αξίωμα με το ίδιο πρόβλημα: Μια ευθεία γραμμή εκτείνεται άπειρα μακριά κατά τη διεύθυνσή της. Και η Γεωμετρία που δημιούργησε αντικατέστησε το $2^{ο}$ αξίωμα του Ευκλείδη.

Μετά την αποδοχή που αποκτά η νέα Γεωμετρία αρκετοί μαθηματικοί προσπαθούν να εργασθούν πάνω στην εκ νέου θεμελίωσή της και την απόδειξη της συνέπειά της. Αρχίζει με τους **Poincare** και **Belltrami** οι οποίοι δημιούργησαν μοντέλα τα οποία επιβεβαιώνουν την αλληλοσυνέπεια της Ευκλείδειας και της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι **Pasch**, **Pierri** και **Peano** προσπάθησαν να δημιουργήσουν μια νέα, πιο ικανοποιητική αξιωματική πραγμάτευση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δίχως τις σιωπηρές παραδοχές του Ευκλείδη και με πιο αποδεκτό σύνολο αξιωμάτων**.**

Οι νέες αυτές εξελίξεις έχουν σημαντικά αποτελέσματα. Καταρχάς απελευθερώνουν την Γεωμετρία, και κατ'επέκταση και άλλες επιστήμες από την παράδοση καθώς πια δεν είναι αναγκαίο να αποτελεί αναπαράσταση της φύσης. Τα αξιώματα δεν αποτελούν πια διαισθητικές αλήθειες αλλά αποκτούν ένα χαρακτήρα κανόνων του "συστήματος " που θέλει στήσει ένας μαθηματικός, και η Γεωμετρία αναδεικνύεται σε ένα υποθετικό – παραγωγικό σύστημα δίχως να εκφράζει τίποτα περισσότερο εκτός από αυτά που υποδηλώνονται στο σύνολο των αξιωμάτων της.

Η θεμελίωση της Γεωμετρίας φτάνει στην πιο υψηλή μορφή της με τα **θεμέλια της Γεωμετρίας** του **Hilbert** (1899) έργο σταθμό για την αξιωματική θεώρηση της μαθηματικής επιστήμης καθώς δίνει ενδιαφέρον περισσότερο στις σχέσεις παρά στην φύση των αντικειμένων.

Τα Θεμέλια της Γεωμετρίας του Hilbert

Ο Γερμανός μαθηματικός Hilbert με το έργο του «*Τα θεμέλια της γεωμετρίας*» προσπαθεί να ξανακτίσει το οικοδόμημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Παίρνοντας υπόψη του και τα έργα των προηγουμένων μελετητών, θεμελιώνει αξιωματικά την Ευκλείδεια Γεωμετρία σύμφωνα με τα νέα δεδομένα και αντιλήψεις, κρατώντας το πνεύμα του Ευκλείδη και υιοθετώντας ένα πιο ικανοποιητικό σύνολο αξιωμάτων που αναφέρονται σε έννοιες οριζόμενες ή μη οριζόμενες, πάντως οικείες, από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η εργασία του αυτή ορίζει τη καινούρια αξιωματική μέθοδο και σφραγίζει τον χαρακτήρα των σύγχρονων Μαθηματικών ,

Ο Hilbert, λοιπόν, θεμελιώνει την (επίπεδη) Γεωμετρία χρησιμοποιώντας 4 βασικούς **όρους**: "**σημείο**", "**γραμμή**", "**πάνω σε**" (σχέση μεταξύ σημείου και γραμμής), "**μεταξύ**"(σχέση μεταξύ σημείων), και "**ίσα**" (σχέση μεταξύ των δομών **τμήμα** και **γωνία** που τα ορίζει επακριβώς) και 5 ομάδες αξιωμάτων:

I. *Αξιώματα Σύνδεσης* (πώς συνδέονται μεταξύ τους οι βασικοί όροι **σημείο** και **γραμμή**)

II. *Αξιώματα Διάταξης* (οι ιδιότητες του βασικού όρου **μεταξύ**)

III. *Αξιώματα Ισότητας* (Δηλώνεται η σχέση ισότητας μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων και μεταξύ γωνιών).

IV. *Αξίωμα Παραλληλίας* (το ισοδύναμο του Playfair)

V. *Αξιώματα Συνέχειας* (Ο Ευκλείδης θεώρησε, σιωπηλά, προφανείς κάποιες αρχές όπως αυτές γίνονταν αποδεκτές εποπτικά από τα σχήματα. Αυτά τα αξιώματα, γεμίζουν αντίστοιχα κενά της θεωρίας των «Στοιχείων»)

Τα «*θεμέλια της γεωμετρίας*» έδειξαν πειστικά ότι η Γεωμετρία μπορεί να είναι ένα σύνολο από ορισμούς και αξιώματα τα οποία έχουν «μη οντολογικό» χαρακτήρα, ακριβώς για να μην υπάρχει επηρεασμός. Μάλιστα ό ίδιος ο Hilbert αναφέρει ότι σκέφτηκε αντί για σημεία, ευθείες ,επίπεδα να χρησιμοποιήσει τις λέξεις τραπέζια, καρέκλες και μεγάλα ποτήρια της μπύρας χωρίς να αλλάξει τίποτα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Σίγουρα αποτελούν σταθμό στην ιστορία της Γεωμετρίας καθώς της καθόρισαν τον δρόμο στον οποίο θα πορευθεί απαλλαγμένη από τις "ατέλειες" της αρχικής της μορφής. Αλλά επίσης σηματοδότησαν την αλλαγή στην μαθηματική σκέψη γενικότερα.

Φιλοσοφία της Γεωμετρίας, από τον Πλάτωνα στον Mill και Kant

Η Μαθηματική σκέψη που τόσο άλλαξε με τις ανακαλύψεις του 19^{ου} αιώνα όπως είδαμε παραπάνω, είχε σφραγιστεί τους προηγούμενους αιώνες από τις απόψεις διαφόρων φιλοσόφων οι οποίοι είχαν προσπαθήσει να εξηγήσουν την ***μεταφυσική*** των μαθηματικών (τι είναι τα μαθηματικά, τι είναι τα σύμβολα και τα σχήματά τους), την ***σημασιολογία*** τους (τι σημαίνουν οι μαθηματικές προτάσεις) και την ***επιστημολογία*** τους (με ποιο τρόπο γνωρίζουμε τα μαθηματικά). Δηλαδή τρία από τα στοιχεία που συγκροτούν την **φιλοσοφία των μαθηματικών**.

Το ερώτημα " ποια είναι η προέλευση των βασικών μαθηματικών εννοιών" είναι πολύ παλιό. Είναι για παράδειγμα οι γεωμετρικές έννοιες δημιουργήματα του νου μας, ή, ενυπάρχουν στην φύση ανεξάρτητα από την σκέψη μας; Από όλους τους φιλοσόφους που ασχολήθηκαν με αυτό το ζήτημα, από την απαρχή των μαθηματικών έως και τον 19^{ο} αιώνα, σίγουρα ο **Πλάτωνας**, ο **Mill**, ο **Kant** και **ο Αριστοτέλης**, αξίζουν ιδιαίτερης αναφοράς. Και αυτό γιατί οι δύο πρώτοι εκφράζουν τις δύο εκ διαμέτρου αντίθετες απόψεις (ακραίος **ορθολογισμός** – ακραίος **εμπειρισμός**), ο τρίτος έκανε μια προσπάθεια σύνθεσης των δύο αυτών απόψεων ενώ ο Αριστοτέλης ήταν κατά μία έννοια ο προάγγελος του εμπειρισμού.

Για τον Πλάτωνα οι μαθηματικές έννοιες (***Μορφές***) είναι καταχωρημένες σε ένα ιδεατό σύμπαν (κόσμος του ***Είναι***), ανεξάρτητο από το πραγματικό (κόσμος του ***γίγνεσθαι***), και τις Μορφές αυτές τις αντιλαμβανόμαστε μόνο μέσω της νόησης. Τα γεωμετρικά αντικείμενα για αυτόν υπάρχουν ανεξάρτητα από τον ανθρώπινο νου και δεν κατανοούνται μέσω των αισθήσεων. Η μάθηση αποτελεί μια ανάμνηση από μια προηγούμενη ζωή, όταν η ψυχή είχε πρόσβαση στον κόσμο του ***Είναι***, ή αποκτάται μέσω της καθαρής σκέψης. Τα γεωμετρικά "αντικείμενα" πού υπάρχουν στην φύση απλά προσεγγίζουν τα Ευκλείδεια σχήματα, τα οποία είναι αιώνια και αναλλοίωτα. Αποτελούν δηλαδή τα φυσικά αντικείμενα, αντανακλάσεις των ιδεατών μαθηματικών αντικειμένων. Γι΄αυτό υποστηρίζει ότι το γεωμετρικό σχήμα που συνοδεύει τις αποδείξεις των προτάσεων βοηθά τον νου να συλλάβει τα απόλυτα, αναλλοίωτα και ιδεατά γεωμετρικά σχήματα. Θα μπορούσαμε με σύγχρονους όρους να πούμε ότι ο Πλάτωνας θεωρεί ότι η γεωμετρική γνώση είναι **a priori**, ανεξάρτητη δηλαδή από την αισθητηριακή εμπειρία.

Οι απόψεις του Πλάτωνα, απαλλαγμένες από τις όποιες μυστικιστικές θέσεις του, υιοθετήθηκαν από μεταγενέστερους φιλοσόφους δημιουργώντας μια μεγάλη και παραδοσιακή σχολή: του **ρασιοναλισμού** ή **πλατωνισμού** ή **ορθολογισμού**. Αυτή η σχολή αναπτύχθηκε από τον $17^{ο}$ αιώνα στα κείμενα των Descartes ,Spinoza, Leibniz, Newton και προσπάθησε να επεκτείνει την μαθηματική μεθοδολογία στο σύνολο της γνώσης.

Σπέρματα της αντίθετης άποψης από αυτήν του Πλάτωνα, του εμπειρισμού, διακρίνονται στα γραπτά ενός άλλου μεγάλου Έλληνα φιλοσόφου του **Αριστοτέλη**. Ο Αριστοτέλης απορρίπτει τον ξεχωριστό κόσμο του Είναι, και θεωρεί ότι οι Μορφές ενυπάρχουν στα μεμονωμένα αντικείμενα. Τα σχήματα που μελετούνται στα μαθηματικά τα "βλέπουμε" μέσα στα φυσικά αντικείμενα, χρησιμοποιώντας την ικανότητα της *αφαίρεσης,* και δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτά.

Οι απόψεις του Αριστοτέλη και αυτές υιοθετήθηκαν και εξελίχθηκαν, από μεταγενέστερους φιλοσόφους (Berkeley, Hume, Reid), οι οποίοι συνέθεσαν το κίνημα του εμπειρισμού , το οποίο αποτελεί μια προσπάθεια για θεμελίωση της γνώσης βασισμένη στην εμπειρία που προσφέρουν οι αισθήσεις. Οτιδήποτε δηλαδή γνωρίζουμε σχετικά με τον κόσμο, άρα και οι μαθηματικές ιδέες, προέρχεται από ουδέτερη και αμερόληπτη παρατήρηση του και ο νους είναι ένας άγραφος χάρτης – tabula rasa. Έτσι η Γεωμετρία είναι μια εμπειρική επιστήμη που ασχολείται με γενικεύσεις από την εμπειρία μας. Κοντολογίς δηλαδή η γνώση είναι **a posteriori** δηλαδή προέρχεται από την εμπειρία.

Παρά όμως την διαφορετική θεώρηση το κοινό πεδίο των δυο σχολών είναι ότι οι μαθηματικές αλήθειες υπάρχουν a priori . Η διαφωνία έγκειται στο κατά πόσο χρειάζεται η αισθητηριακή αντίληψη στην σύλληψη και στην μελέτη των γεωμετρικών ιδεών.

Ένας τυπικός αν και λίγο ακραίος εκπρόσωπος του εμπειρισμού είναι ο **John Stewart Mill** (1806 – 1873). Ο Mill υποστήριξε ότι ο ανθρώπινος νους είναι μέρος της φύσης και επομένως οι γνώσεις δεν μπορεί να είναι a priori. Απορρίπτει την ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων (μορφών) και θεμελιώνει την Γεωμετρία πάνω στην παρατήρηση. Για τον Mill τα (θεωρούμενα από τους ρασιοναλιστές ως ιδεατά) γεωμετρικά αντικείμενα είναι προσεγγίσεις των αληθινών γεωμετρικών σχημάτων που σχεδιάζουμε και η Γεωμετρία αφορά εξιδανικεύσεις των δυνατοτήτων κατασκευής. Κατά αυτήν την έννοια η Γεωμετρία είναι μια μυθοπλασία και οι γεωμετρικές προτάσεις είναι αληθινές στον βαθμό που τα πραγματικά σχήματα (που εμείς σχεδιάζουμε) προσεγγίζουν τα ιδεατά (εξιδανικευμένα) στα οποία αναφέρονται τα αιτήματα και οι προτάσεις της Γεωμετρίας.

Επίσης κατά την άποψη του Mill οι μαθηματικές προτάσεις δεν είναι *αναγκαία αληθινές*. Η βεβαιότητά τους βρίσκεται στα όρια αυτού που μπορούμε να αντιληφθούμε. Έτσι, για τον Mill, τα γεωμετρικά αξιώματα επιλέχθηκαν μέσου του στοχασμού για το πώς αντιλαμβανόμαστε το σύμπαν, και έπειτα ανακαλύπτουμε μέσω της εμπειρίας ότι η αντιληπτική μας διαίσθηση για τα αξιώματα είναι σωστή και αξιόπιστη και συμφωνεί με τις δομές του Ευκλείδη. Ο εμπειρισμός του Mill , παραλλαγμένος λίγο , έχει δώσει το πλαίσιο στο οποίο κινούνται και σύγχρονες τάσεις της φιλοσοφίας των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα του Kitcher.

Τις δυο παραπάνω τάσεις, εμπειρισμό και ορθολογισμό , προσπάθησε να συγκεράσει ένας φιλόσοφος προγενέστερος του Mill, ο **Immanouel Kant** (1724 – 1804). Ο Kant προσπάθησε να αποδείξει ότι τα μαθηματικά αποτελούν a priori γνώση αλλά παρόλα αυτά εφαρμόζονται με απόλυτη βεβαιότητα σε όλη την εμπειρία. Θεωρεί ότι οι έννοιες δεν πηγάζουν από ένα άυλο παράλληλο σύμπαν αλλά προκύπτουν μέσω της εμπειρίας με βάση κάποια εγγενή πλαίσια αντίληψης τα οποία είναι έμφυτα στην νόηση.

Για να στοιχειοθετήσει όλα αυτά ο Kant διέκρινε δύο τύπους a priori γνώσης**.** Την “***αναλυτική a priori γνώση”***, που μαθαίνουμε την αλήθεια της μέσα από την λογική ανάλυση, και την “***συνθετική a priori”*** που είναι η γνώση η οποία οφείλεται στις **ενοράσεις – “διαισθήσεις”** μας για τον χώρο και τον χρόνο, και οι οποίες είναι μέρος της ανθρώπινης νόησης (*ενόραση ή διαίσθηση είναι για τον Kant η άμεση επίγνωση μιας έννοιας χωρίς την μεσολάβηση της εμπειρίας*) . Για τον Kant οι μαθηματικές προτάσεις είναι συνθετικές a priori γνώσιμες , μέσω της “καθαρής διαίσθησης”- ενόρασης . Αυτή η “καθαρή διαίσθηση” μας δίνει την εμπειρική γνώση για τα αντικείμενα που σχετίζονται με τον χώρο και τον χρόνο και μας καθοδηγεί σε μια γεωμετρική κατασκευή ή μια απόδειξη μιας πρότασης. Έτσι η Ευκλείδεια Γεωμετρία αφορά τους αναγκαίους τρόπους με τους οποίους οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται τα αντικείμενα στον χώρο και η δομή των συλλογισμών που κάνουμε οφείλεται, επίσης, στην αντίληψή μας. Δηλαδή η a priori υπάρχουσα ενόραση – διαίσθηση του χώρου ταυτίζεται για τον Kant με τον Ευκλείδειο χώρο. Επομένως και τα Ευκλείδεια σχήματα αποτελούν μέρος του χώρου ακόμα και αν δεν μπορούμε να τα δούμε στην πραγματικότητα, όπως μια πολύ λεπτή γραμμή.

Οι αλήθειες της γεωμετρίας μας επιβάλλονται από τον τρόπο που λειτουργεί η νόησή μας, έτσι ανεξάρτητα της εμπειρίας του καθενός αποτελούν αλήθεια για αυτόν. Και καθώς ισχύουν οι αλήθειες αυτές για κάθε ανθρώπινη νόηση είναι και αντικειμενικές. Άρα ο Kant πίστευε στην αντικειμενική και αιώνια αλήθειας της γεωμετρίας όπως ο Πλάτωνας.

Η φιλοσοφία του Kant τον $19^{ο}$ αιώνα, αλλά και αργότερα, συνάντησε ανυπέρβλητα εμπόδια, όμως διατήρησε κυρίαρχη επιρροή στην φιλοσοφία των μαθηματικών. Παρόλη την ηρωική προσπάθεια σύνθεσης των δυο διαφορετικών σχολών, εμπειρισμού και ορθολογισμού, η φιλοσοφία του για τα μαθηματικά φαίνεται να έχει κάποια προβλήματα. Η ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας ερχόταν σε αντίθεση τόσο με την a priori γνώση, είτε αυτή προέρχονταν από τον υπερβατικό κόσμο των ιδεών είτε από ενοράσεις, όσο και με την αναγκαιότητα του $5^{ου}$ αιτήματος. Ο Γεωμετρικός χώρος δεν αποτελούσε πια μια υπερβατικά ή ενορατικά καθορισμένη έννοια που υποχρεωτικά συμπίπτει με τον φυσικό χώρο. Ο φυσικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί πλέον μια εμπειρική έννοια που στηρίζεται στην επιλογή των αξιωμάτων που θα επιλέξουμε να τον θεμελιώσουμε και υπόκειται σε πειραματική διερεύνηση.

Δεν ήταν όμως μόνο η καντιανή φιλοσοφία για τα μαθηματικά που με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών κλονίστηκε. Η απώλεια της βεβαιότητας στην Γεωμετρία, έφερνε κλονισμό σε όλη την ανθρώπινη γνώση. Τα θεμέλια των μαθηματικών χρειάζονταν ανεξαρτητοποίηση από την Γεωμετρία. Είχε έρθει η ώρα της αριθμητικής να κρατήσει πάνω της το Μαθηματικό οικοδόμημα και κατ επέκταση την ανθρώπινη γνώση. Και οι μεγάλοι μαθηματικοί και διανοητές του $19^{ου}$ αιώνα (Dedekind, Weirstrass, Cantor, Russel, Fregge , Peano, Hilbert κ.ά) ανταποκρίθηκαν στην πρόκληση.

Βιβλιογραφία

Davis, P.J. & Hersch, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία.* Τροχαλία.

Eves, H. (1997). *Foundations and funtamental concepts of Mathematics*. Dover.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics*. Oxford University press.

Wilder, R. (1986). *Η εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*. Open University.