

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ-ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

6^η Δοκιμασία

1^ο Θέμα

Στις ερωτήσεις 1 έως και 4 να επιλέξετε τη σωστή απάντηση αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Ερώτηση 1:

Το κυκλικό γράφημα δείχνει τον αριθμό και το είδος των μεταλλίων που κέρδισε η Ελλάδα στους θερινούς Ολυμπιακούς Αγώνες στην Αθήνα το 2004.



Το ποσοστό των μεταλλίων που κέρδισε η Ελλάδα και δεν είναι χρυσά είναι το:

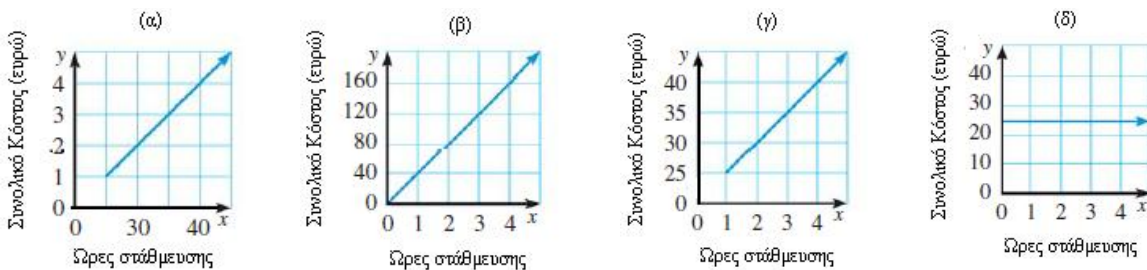
- α) 15%
- β) 25%
- γ) 60%
- δ) 62,5%

Ερώτηση 2:

Ο πίνακας παρουσιάζει το κόστος στάθμευσης αυτοκινήτου σε ένα parking.

Ώρες στάθμευσης	1	2	3	4
Κόστος στάθμευσης (σε ευρώ)	25	30	35	40

Το γράφημα που αντιπροσωπεύει καλύτερα το συνολικό κόστος της στάθμευσης ως συνάρτηση του χρόνου είναι το:



Ερώτηση 3:

Ποιος πίνακας τιμών αντιπροσωπεύει τον παρακάτω κανόνα:

«πάρε ως αριθμό y το άθροισμα ενός άλλου αριθμού x με το τετράγωνό του»

(a)	
x	y
0	1
2	3
4	5

(b)	
x	y
1	2
2	6
4	20

(c)	
x	y
1	1
2	6
4	8

(d)	
x	y
1	2
2	4
4	8

Ερώτηση 4:

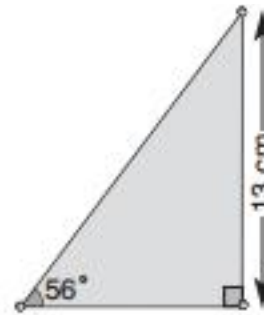
Στο διπλανό σχήμα η υποτείνουσα ισούται με:

α) $13 \text{ συν} 56^\circ$

β) $13 \text{ ημ} 56^\circ$

γ) $\frac{13}{\text{συν} 56^\circ}$

δ) $\frac{13}{\text{ημ} 56^\circ}$



2^ο Θέμα

A.

1. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$

2. Αν $y + \frac{1}{y} = 3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $y^2 + \frac{1}{y^2} =$

B.

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

1. $6x^5 - 4x^3y - 3x^2y^3 + 2y^4 =$

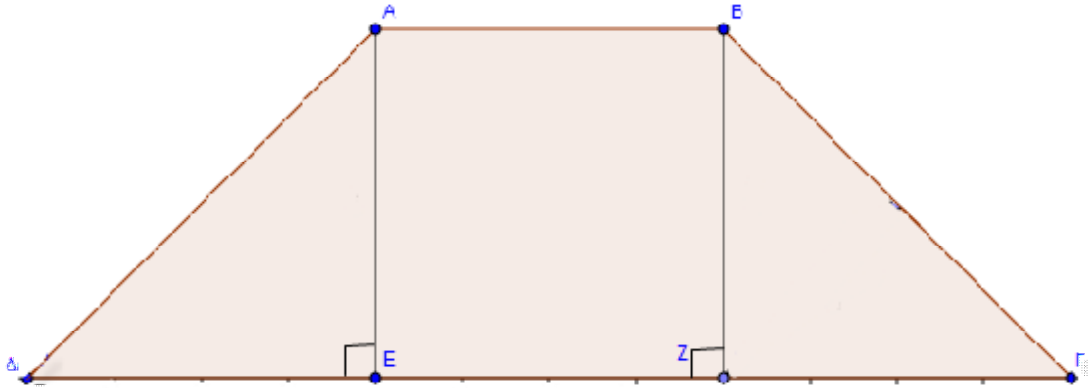
2. $4x^3 - 20x^2 + 25x =$

3. $(1 + \alpha)^2 - \beta^2 =$

3^ο Θέμα

Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AB = 4\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 12\text{cm}$ και οι γωνίες $\angle A$, $\angle B$ είναι 45° .

1. Να αποδείξετε ότι το ύψος του BZ είναι 4cm .
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.



4^ο Θέμα

Οι λάμπες φωτισμού παλαιού τύπου (λάμπες πυρακτώσεως) κοστίζουν $0,5\text{€}$ η μία και έχουν μέση διάρκεια ζωής 1200 ώρες.

Οι λάμπες φωτισμού νέου τύπου (led) κοστίζουν 6€ η μία και έχουν μέση διάρκεια ζωής 50000 ώρες.

Ποιου τύπου λάμπες θα προτιμήσετε από οικονομικής πλευράς;

(Δικαιολογήστε την απάντησή σας)

Ενδεικτικές απαντήσεις

1° Θέμα

Ερώτηση 1

Το σύνολο των μεταλλίων είναι $6 + 6 + 4 = 16$

Δεν είναι χρυσά τα 10 άρα $\frac{10}{16} = 0,625 = 62,5\%$

Σωστή απάντηση η δ.

Ερώτηση 2

Το γράφημα που αντιπροσωπεύει καλύτερα το συνολικό κόστος της στάθμευσης ως συνάρτηση του χρόνου είναι αυτό που ανήκουν πάνω του τα σημεία με συντεταγμένες (1,25), (2,30), (3,35) και (4,40)

Σωστή απάντηση η γ

Ερώτηση 3

Η σχέση είναι $y = x + x^2$, οπότε η σωστή απάντηση είναι η β

Ερώτηση 4

Σωστή απάντηση είναι η δ, γιατί $\eta\mu 56^\circ = \frac{\text{απέναντη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$

2° Θέμα

A.

1. Αναπτύσσοντας τις ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

$$2. y + \frac{1}{y} = 3 \quad (1)$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) στο τετράγωνο και υπολογίζουμε την παράσταση :

$$\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 3^2 \quad \text{ή} \quad y^2 + 2y \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 9 \quad \text{ή} \quad y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = 9 \quad \text{ή} \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = 7$$

B.

$$1. 6x^5 - 4x^3y - 3x^2y^3 + 2y^4 = 2x^3(3x^2 - 2y) - y^3(3x^2 - 2y) = (3x^2 - 2y)(2x^3 - y^3)$$

$$2. 4x^3 - 20x^2 + 25x = x(4x^2 - 20x + 25) = x(2x - 5)^2$$

$$3. (1 + \alpha)^2 - \beta^2 = (1 + \alpha + \beta)(1 + \alpha - \beta)$$

3^ο Θέμα

1. Το ABZE είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα $ZE = AB = 4 \text{ cm}$.
Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές $DE = EZ = 4 \text{ cm}$. Το τρίγωνο BZΓ είναι ορθογώνιο και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι 45° άρα και η γωνία \hat{B} του τριγώνου είναι 45° . Επομένως $BZ = Z\Gamma = 4 \text{ cm}$.
2. Το εμβαδόν του τραpezίου ADBΓ είναι $\frac{(AB)+(\Gamma A)}{2} (BZ) = 32 \text{ cm}^2$

4^ο Θέμα

Με αναγωγή στην τιμή του κάθε τύπου λάμπας για μια ώρα λειτουργίας της, προκύπτουν τα

παρακάτω κλάσματα $\frac{0,5}{1200}$ και $\frac{6}{50000}$

Αν μετατραπούν σε ισοδύναμα με ίδιο αριθμητή, προκύπτει:

$$\frac{0,5}{1200} = \frac{0,5 \times 12}{1200 \times 12} = \frac{6}{14400} > \frac{6}{50000}, \text{ δηλαδή, συμφέρουν οι λάμπες νέου τύπου (led).}$$

7^η Δοκιμασία

1^ο Θέμα

α. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες, ώστε να εκφράζουν τις αξιοσημείωτες ταυτότητες:

1. $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) =$
2. $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 =$
3. $(\alpha - \beta)^2 =$
4. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) =$

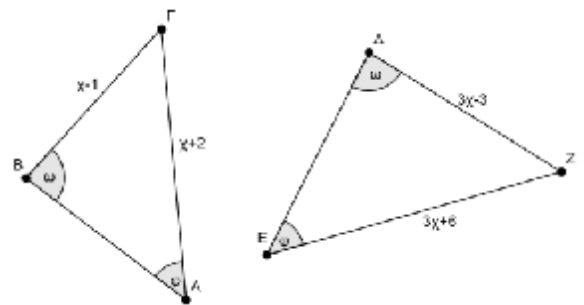
β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) σωστό ή με (Λ) λάθος.

1. $(a + b) \cdot (b - a) = a^2 - b^2$
2. $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
3. $a^2 + b^2 = (a + b)^2$
4. $(a + b)^3 = b^3 + a^3 + 3ab(a + b)$
5. $(-a - \beta)^2 = (a + \beta)^2$

2^ο Θέμα

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ.

- 1) Να δικαιολογήσετε γιατί είναι όμοια.
- 2) Να δείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓ προς το ΔΕΖ είναι: $\lambda = \frac{1}{3}$



3^ο Θέμα

Σε ένα τετράγωνο αυξάνουμε το μήκος κάθε μιας από τις δύο απέναντι πλευρές κατά 1cm και ελαττώνουμε το μήκος των άλλων δύο κατά 2 cm την κάθε μια.

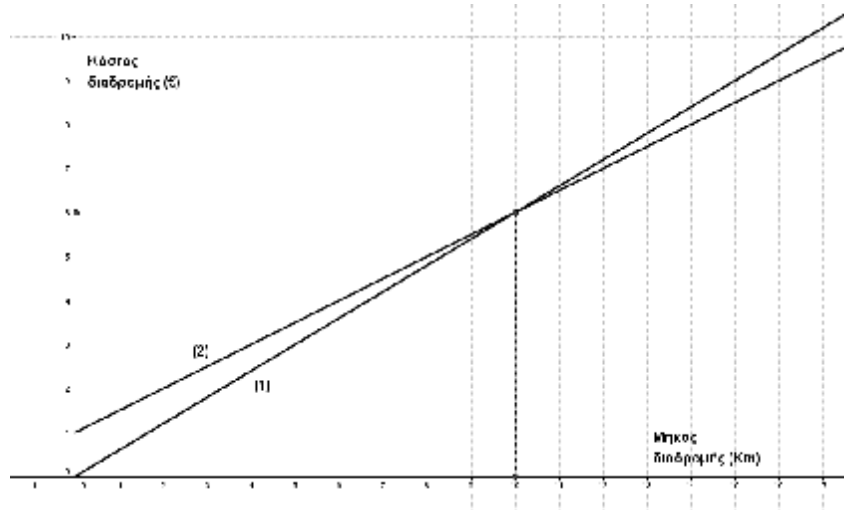
Το εμβαδόν του νέου σχήματος που προκύπτει είναι 18 cm^2 . Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

4^ο Θέμα

Δύο εταιρείες ταξί έχουν τις ακόλουθες χρεώσεις:

- Η εταιρεία ταξί «**Αθήνα**» χρεώνει 1€ για τη σημαία και 0,5€ ανά km διανυόμενης διαδρομής.
- Η εταιρεία ταξί «**Βιαστικός**» (για να προσελκύσει πελάτες) δε χρεώνει σημαία, αλλά μόνο το κόστος διαδρομής, που είναι 0,6€ ανά km διανυόμενης διαδρομής.

Στο διπλανό διάγραμμα (Μήκος διαδρομής – κόστος διαδρομής) φαίνονται τα διαγράμματα των δύο εταιρειών ταξί.



- 1) Ποιο διάγραμμα (1) ή (2) αντιστοιχεί στην κάθε εταιρεία;

(συμπληρώστε κατάλληλα στον επόμενο πίνακα)

		διάγραμμα
Εταιρεία	«Αθήνα»	
	«Βιαστικός»	

- 2) Ποια εταιρεία θα προτιμήσετε για μια διαδρομή 15 km; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

Ενδεικτικές απαντήσεις

1^ο Θέμα

α.

1. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

2. $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = (a - b)^3$

3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

β.

1. Λ

2. Σ

3. Λ

4. Σ

5. Σ

2^ο Θέμα

1. Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια, γιατί έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες.

2. Λόγω της ομοιότητας, τα τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές ανάλογες και ο λόγος

$$\text{ομοιότητας του ABΓ προς το ΔΕΖ είναι } I = \frac{ΑΓ}{ΕΖ} = \frac{ΒΓ}{ΔΖ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} \Rightarrow I = \frac{c+2}{3c+6} = \frac{c+2}{3(c+2)} = \frac{1}{3}$$

3^ο Θέμα

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου.

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται οι κάθετες πλευρές είναι x + 1, x - 2.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι $(x + 1)(x - 2) = 18 \dots x^2 - x - 20 = 0$ ή x = -4, x = 5. Η τιμή -4 απορρίπτεται όποτε η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος 5cm.

4^ο Θέμα

1^η Ερώτηση: Η σωστή συμπλήρωση του πίνακα δίνει:

		διάγραμμα
Εταιρεία	«Αθήνα»	2
	«Βιαστικός»	1

2^η Ερώτηση:

Από τη παρατήρηση των διαγραμμάτων των δυο εταιρειών ταξί, για απόσταση μεγαλύτερη των 10km το διάγραμμα (2) της εταιρείας «Αθήνα» βρίσκεται χαμηλότερα από το διάγραμμα (1) της εταιρείας «Βιαστικός», άρα για μια απόσταση 15km συμφέρει η εταιρεία «Αθήνα».

Εναλλακτικά μέσω των ανισώσεων

$$\begin{array}{ccc} 1+0,5c < 0,6c \Leftrightarrow & & 1+0,5c > 0,6c \Leftrightarrow \\ \dots\dots\dots \Leftrightarrow & \text{ή της} & \dots\dots\dots \Leftrightarrow \\ c > 10 & & c < 10 \end{array}$$

Η απάντηση είναι ότι συμφέρει η εταιρεία «Αθήνα».

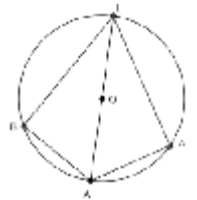
8^η Δοκιμασία

1^ο Θέμα

α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

1. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, είναι ίσα
2. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες, είναι ίσα
3. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση, τότε είναι ίσα
4. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση
5. Σε όλα τα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες
6. Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες, μια προς μία, τότε είναι ίσα.

β. Στο διπλανό σχήμα η ΑΓ είναι διάμετρος στον κύκλο και οι χορδές ΑΒ, ΑΔ είναι ίσες. Να δείξετε ότι ΒΓ=ΓΔ.



2^ο Θέμα

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = c^3 - 2c^2 - c + 2$ και $B = 3c^2 - 6c$

1. Να γίνουν γινόμενο πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις Α και Β.
2. Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής χ έχει νόημα η παράσταση $\frac{A}{B}$
3. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{A}{B} = \frac{c+1}{6}$

3^ο Θέμα

Δύο μηχανικοί σχεδιάζουν την κατασκευή ενός υπογείου σταθμού METRO στη συμβολή των οδών Συγγρού και Λαγουμιτζή. Αν η ευθεία που αναπαριστά την οδό Συγγρού είναι η $y = x$ και η ευθεία που αναπαριστά την οδό Λαγουμιτζή είναι η $y = -x + 13$ στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του σχήματος, να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Ποιες οι συντεταγμένες x, y του σημείου τομής Β των δυο οδών στον χάρτη;
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της οδού Λαγουμιτζή με τον x' άξονα, καθώς και με τον y' άξονα.



4^ο Θέμα

Εάν κάποιος έχει εισόδημα 100.000 ευρώ, τι ποσοστό του εισοδήματος του θα πληρώσει σαν φόρο στο κράτος, αν η φορολογική κλίμακα είναι η παρακάτω: 15% για τα πρώτα 30.000 ευρώ του εισοδήματός του. 28% για τα επόμενα 30.000 ευρώ και 31% για τα πάνω από τα 60.000 ευρώ.

Ενδεικτικές απαντήσεις

1^ο Θέμα

A.

1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ
5. Λ
6. Σ

β. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABΓ και AΓΔ. Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια. Οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές, γιατί είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα τρίγωνα έχουν την πλευρά ΑΓ κοινή και την AB=AD από την υπόθεση. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα. Συνεπώς ΒΓ=ΓΔ

2^ο Θέμα

1.

$$A = c^3 - 2c^2 - c + 2 = c^2(c-2) - (c-2) = (c-2)(c^2-1) = (c-2)(c-1)(c+1)$$

$$B = 3c^2 - 6c = 3c(c-2)$$

2.

$$\frac{A}{B} = \frac{(c-2)(c-1)(c+1)}{3c(c-2)} \text{ Για να ορίζεται η παράσταση, πρέπει } 3c(c-2) \neq 0$$

$$3c(c-2) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ ή } c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

Άρα η παράσταση ορίζεται για $c \neq 0$ και $c \neq 2$

3.

$$\frac{A}{B} = \frac{c+1}{6} \Rightarrow \frac{(c-2)(c-1)(c+1)}{3c(c-2)} = \frac{c+1}{6} \text{ με } c \neq 0 \text{ και } c \neq 2$$

$$\Rightarrow \frac{(c-1)(c+1)}{3c} = \frac{c+1}{6} \Rightarrow 6(c-1)(c+1) = 3c(c+1) \Rightarrow 6c^2 - 6 = 3c^2 + 3c \Rightarrow$$

$$3c^2 - 3c - 6 = 0 \Rightarrow c^2 - c - 2 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow c_1 = -1 \text{ και } c_2 = 2$$

Η λύση $c=2$ απορρίπτεται και επομένως η λύση της εξίσωσης είναι $c=-1$

3^ο Θέμα

1. Για να βρούμε τις συντεταγμένες x , y του σημείου τομής B των δυο οδών στο χάρτη θα επιλύσουμε το σύστημα των δυο εξισώσεων :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x \\ y = -x + 13 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -x + 13 \\ y = x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{13}{2} = 6,5 \\ y = \frac{13}{2} = 6,5 \end{array} \right.$$

Άρα, το σημείο τομής B έχει συντεταγμένες $B(6,5, 6,5)$.

2. Η οδός Λαγουμιτζή αναπαρίσταται από την ευθεία $y = -x + 13$. Προκειμένου να βρούμε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον x ' x άξονα, θα θέσουμε όπου $y = 0$. Επομένως θα έχουμε:

$$0 = -x + 13 \Rightarrow \underline{\underline{x = 13}}$$

Προκειμένου να βρούμε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον y ' y άξονα, θα θέσουμε όπου $x = 0$. Επομένως θα έχουμε:

$$y = -0 + 13 \Rightarrow \underline{\underline{y = 13}}$$

4^ο Θέμα

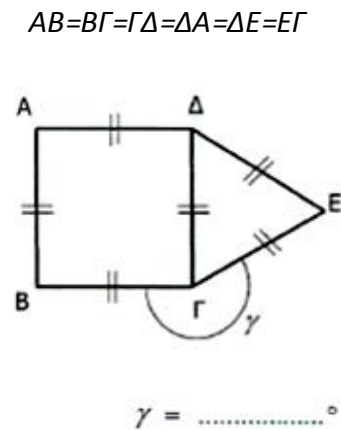
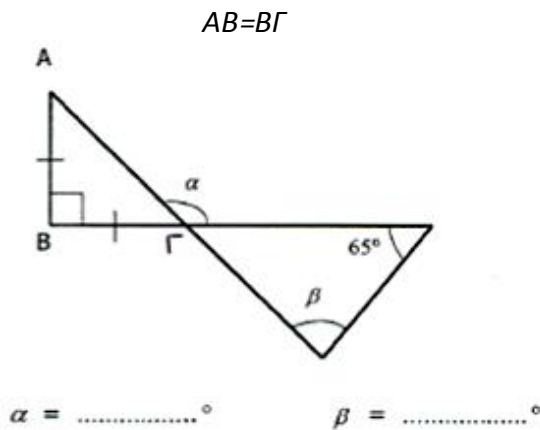
$$(0,15 \times 30000) + (0,28 \times 30000) + (0,31 \times 40000) = 25300 = 25,35\% \text{ των } 100.000 \text{ ευρώ}$$

9^η Δοκιμασία

1^ο Θέμα

Αφού λάβετε υπόψη σας τα δεδομένα στα παρακάτω σχήματα, να υπολογίσετε τις γωνίες:

\hat{a} , \hat{b} , \hat{g}



2^ο Θέμα

α) Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα: $x^2 - 3x + 2$ και $x^2 + x - 2$.

β) Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες δεν ορίζεται η εξίσωση:

$$\frac{2x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x^2 + x - 2}$$

γ) Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση.

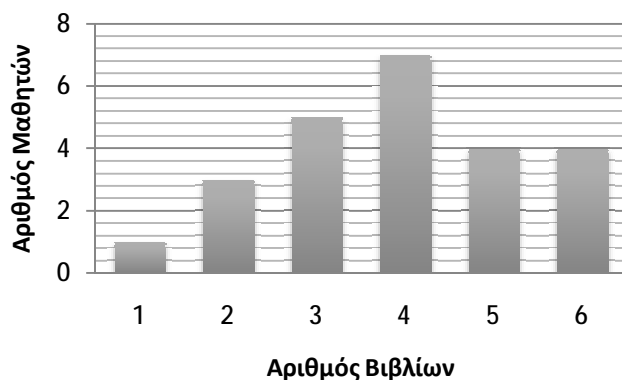
3^ο Θέμα

Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διαβάστηκαν από τους μαθητές μιας συγκεκριμένης τάξης

α. Πόσους μαθητές έχει η τάξη;

β. Πόσα βιβλία διάβασαν όλοι οι μαθητές;

γ. Να βρείτε τον μέσο όρο των βιβλίων που διαβάστηκαν από κάθε μαθητή της τάξης αυτής.



δ. Στο τέλος του χρόνου θα υπάρξει ένα λαχείο. Ο νικητής θα πάρει 15€ για κάθε βιβλίο που είχε διαβάσει. Να βρείτε την πιθανότητα το βραβείο να μην ξεπεράσει τα 45€.

4^ο Θέμα

Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + 3x + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$ με $0^\circ < \omega < 180^\circ$.

- α) Αν η μία λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός -2 , να βρεθεί η γωνία/οι γωνίες ω και η άλλη λύση της εξίσωσης.
- β) Αν η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Ενδεικτικές απαντήσεις

1° Θέμα

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Επομένως, η γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ είναι ίση με 45° . Παρατηρούμε πως:

$$\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Rightarrow 45 + \hat{\alpha} = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 135^\circ}$$

Η γωνία $\hat{\Gamma}$ του δεύτερου τριγώνου είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επομένως, για το δεύτερο τρίγωνο του πρώτου σχήματος θα έχουμε ότι:

$$\hat{\Gamma} + \beta + 65^\circ = 180 \Rightarrow \beta = 180 - (45 + 65) = 180 - 110 \Rightarrow \boxed{\beta = 70^\circ}$$

Το δεύτερο σχήμα αποτελείται από ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο. Επομένως ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\Delta\hat{\Gamma}\hat{E} = 60^\circ \text{ και } \text{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 90^\circ$$

Για τη πλήρη γωνία $\hat{\Gamma}$ θα έχουμε ότι:

$$\gamma + \Delta\hat{\Gamma}\hat{E} + \text{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 360 \Rightarrow \gamma + 60 + 90 = 360 \Rightarrow \gamma + 150 = 360 \Rightarrow \boxed{\gamma = 210^\circ}$$

2° Θέμα

α) $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

β) Πρέπει $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ή $x^2 + x - 2 \neq 0$ ή $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ ή $x \neq -2$ ή $x \neq 2$

γ) Αρχικά βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών και πολλαπλασιάζουμε με αυτό κάθε όρο ξεχωριστά. Επομένως, έχουμε διαδοχικά τα ακόλουθα:

$$\text{Ε.Κ.Π.} = (x - 1)(x + 2)(x - 2)$$

$$\frac{2x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x^2 + x - 2} \Rightarrow \frac{2x}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{(x + 2)(x - 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot (x + 2) = (x + 2)(x - 1) - 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow 2x^2 + 4x = x^2 - x + 2x - 2 - 2x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x = x^2 - x + 2 \Rightarrow x^2 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 + \sqrt{33} \\ x_2 = -5 - \sqrt{33} \end{cases}$$

3° Θέμα

α) Ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι ίσος με: $1+3+5+7+4+4=24$

β) Βασιζόμενοι στο διάγραμμα της άσκησης συμπεραίνουμε πως το σύνολο των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές είναι ίσο με:

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 94$$

γ) Μέσος όρος βιβλίων που διαβάστηκαν από κάθε μαθητή της τάξης:

$$\mu = 94/24 = 3,91$$

δ) Προκειμένου το βραβείο να μην ξεπεράσει τα 45€ ο μαθητής που θα πρέπει να κληρωθεί θα πρέπει να έχει διαβάσει μέχρι και 3 βιβλία.

Ο αριθμός των μαθητών που έχουν διαβάσει μέχρι και 3 βιβλία είναι ίσος με 9.

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι ίση με:

$$\Pi = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375$$

4^ο Θέμα

α) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $x^2 + 3x + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$ όπου $x = -2$ και έχουμε τα εξής:

$$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0 \Rightarrow 2 + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0^\circ < \omega < 180^\circ \Rightarrow \omega = 45^\circ \text{ ή } \omega = 135^\circ$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην εξίσωση $x^2 + 3x + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$, όπου $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{2}$ έχουμε τα εξής:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}. \text{ Επομένως η άλλη λύση της εξίσωσης είναι η } x = -1$$

β) Προκειμένου η εξίσωση $x^2 + 3x + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$ να έχει μία διπλή ρίζα θα πρέπει $\Delta=0$. Συνεπώς,

$$\Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4 \cdot 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{9}{16} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{3}{4}$$

Από τη τριγωνομετρική σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ προκύπτει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega + \frac{9}{16} = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{7}{16} \Rightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Rightarrow \epsilon\phi\omega = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

10^η Δοκιμασία

1^ο Θέμα

1. Να υπολογίσετε την τιμή καθεμίας από τις παρακάτω παραστάσεις (να δώσετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή μορφή του):

$$A = -\frac{5}{7} + \frac{2}{7} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \quad B = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) \quad G = \sqrt{200} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18}$$

2.

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$A = (x-3)(x+7) - (2x-7)(x-3)$$

β. Να λύσετε την εξίσωση $(x-3)(-x+14) = 0$

2^ο Θέμα

Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + 6$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(3, 0)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των a και b .

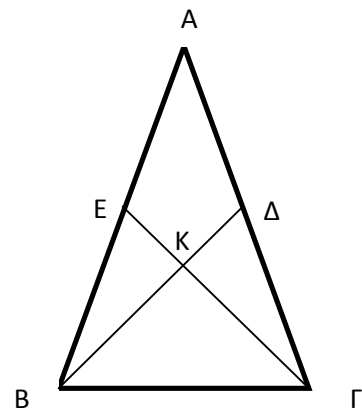
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, την οποία και να βρείτε.

γ) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

3^ο Θέμα

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE οι οποίες τέμνονται στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

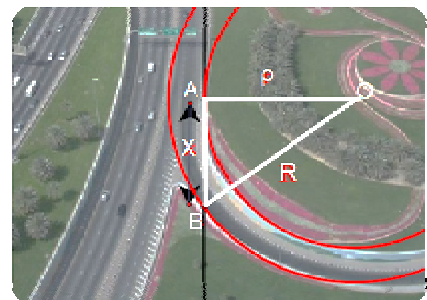
- Το τρίγωνο $B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.
- Η AK είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$.
- Να αποδείξετε ότι $KE = K\Delta$.



4^ο Θέμα

Στο συγκοινωνιακό κόμβο του σχήματος η απόσταση του σημείου O από το σημείο A του δρόμου είναι ίση με ρ και η απόσταση του σημείου O από το σημείο B είναι ίση με R .

- Αν το τμήμα AB είναι εφαπτόμενο του κύκλου με κέντρο το O και ακτίνα την OA , να εξετάσετε το είδος του τριγώνου OAB . Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Να αποδείξετε ότι η απόσταση x είναι ίση με $x^2 = \alpha(R + \rho)$ όπου $\alpha = R - \rho$.
- Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την απόσταση x , αν γνωρίζετε ότι $R = 50\text{m}$ και $\alpha = 5$.



Ενδεικτικές απαντήσεις

1° Θέμα

$$1. A = -\frac{5}{7} + \frac{2}{7} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{7} + \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{7} + \frac{6}{14} = -\frac{10}{14} + \frac{6}{14} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

$$B = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5})^2 - (2)^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\Gamma = \sqrt{200} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 100} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{9 \cdot 2} = 10\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$$

$$2. \alpha) A = (x-3)(x+7) - (2x-7)(x-3) = (x-3) \cdot [(x+7) - (2x-7)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (x-3)(x+7-2x+7) = (x-3)(-x+14)$$

$$\beta) (x-3)(-x+14) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 14$$

2° Θέμα

α) Αρχικά αντικαθιστούμε στη συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + 6$ όπου $x = -1$ και όπου $y = 0$ και έχουμε τα εξής:

$$\alpha \cdot (-1)^2 + \beta \cdot (-1) + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha - \beta + 6 = 0} \quad (1)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στη συνάρτηση $y = ax^2 + \beta x + 6$ όπου $x = 3$ και όπου $y = 0$ και έχουμε τα εξής:

$$\alpha \cdot (3)^2 + \beta \cdot (3) + 6 = 0 \Rightarrow 9\alpha + 3\beta + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{3\alpha + \beta + 2 = 0} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 4$

β) Αντικαθιστούμε στη συνάρτηση του προβλήματος $y = ax^2 + \beta x + 6$ τους συντελεστές α και β , οπότε έχουμε την συνάρτηση $y = -2x^2 + 4x + 6$.

Παρατηρούμε πως ο συντελεστής α της παραπάνω συνάρτησης είναι αρνητικός. Αυτό σημαίνει πως η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή.

Μέγιστη τιμή της συνάρτησης $y = -2x^2 + 4x + 6$:

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}{-8} = -\frac{16 + 48}{-8} = \frac{64}{8} \Rightarrow \boxed{y_{\max} = 8}$$

γ) Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = -2x^2 + 4x + 6$ είναι ο εξής:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{2 \cdot (-)} \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

3^ο Θέμα

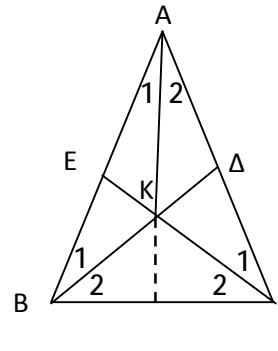
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΕΑ τα οποία έχουν:

- i) $AB=AG$ (από δεδομένα)
- ii) $AD=AE$ (ΕΓ και ΒΔ διάμεσοι που καταλήγουν σε ίσες πλευρές)
- iii) $\hat{A} = \hat{A}$ (κοινή γωνία)

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΕΑ είναι ίσα. Επομένως, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο), οπότε έχουμε τα ακόλουθα:

$\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$. Αυτό σημαίνει πως το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές



β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΚΓ τα οποία έχουν:

- i) $AK=AK$ (κοινή πλευρά)
- ii) $BK=KG$ (το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές)
- iii) $AB=AG$ (από δεδομένα της άσκησης)

Επομένως τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΚΓ είναι ίσα και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, οπότε η ΑΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ άρα η διάμεσος καθώς και το ύψος του. Συνεπώς, η ΑΚ είναι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΒΕ και ΚΔΓ τα οποία έχουν:

- i) $BE=GD$ (ΕΓ και ΒΔ διάμεσοι που καταλήγουν σε ίσες πλευρές)
- ii) $BK=KG$ (το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές)
- iii) $\hat{BKE} = \hat{GKD}$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα ΚΒΕ και ΚΔΓ είναι ίσα οπότε $KE=KD$.

4^ο Θέμα

1. Το τμήμα ΑΒ είναι εφαπτόμενο του κύκλου με κέντρο Ο, επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο αφού η ακτίνα ΟΑ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΑΒ.

2. $x^2 = R^2 - r^2 = (R - r)(R + r) = \alpha (R + r)$ (1)

3. Αφού $\alpha = 5$ άρα $r = 50 - 5 = 45$ m

Με αντικατάσταση στον τύπο (1) έχουμε $x^2 = 5 \cdot (50 + 45) \Leftrightarrow x = 21,8$ m.