

Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' λυκείου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$.
 - β) έχει κέντρο το σημείο $(3, -1)$ και ακτίνα 5 .
 - γ) έχει κέντρο το σημείο $(-2, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2, 3)$.
 - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1, 3)$ και $B(-3, 5)$.
 - ε) διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $A(3, 5)$ και $B(-1, 4)$.
 - στ) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$.
 - ζ) έχει κέντρο το σημείο $(8, -6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$.
 - θ) έχει ακτίνα 4 , εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$.
 - ι) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 2)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(-6, 2)$.
 - ια) έχει κέντρο το σημείο $(3, 3)$ και εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$.
 - ιβ) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$.
2. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Αποδείξτε ότι:
- α) η ευθεία $y = -x$ τέμνει τον κύκλο.
 - β) η ευθεία $y = 2x$ δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
 - γ) η ευθεία $y = \sqrt{3}x$ εφάπτεται του κύκλου.
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει ακτίνα 10 και εφάπτεται του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $A(-4, 3)$.
4. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.
 - γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B) , όπου το A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα A, B απέχουν τη μικρότερη απόσταση.
 - δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1 , το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.
5. Δίνεται ο κύκλος $C : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C στις παρακάτω περιπτώσεις :
- α) το σημείο επαφής είναι το $A(1, 3)$
 - β) η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : y = 2x + 25$.

Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' λυκείου

6. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ και το σημείο $A(4, 3)$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C , η οποία διέρχεται από το A .
- β) Υπολογίστε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος.
7. Δίνεται η εξίσωση $(C_\lambda): x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$.
- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ ο κύκλος που παριστάνει η (C_λ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
8. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 - \lambda x - \lambda y = 0$ και η ευθεία $(\epsilon): x - y + 3 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (ϵ) :
- α) να εφάπτεται στον (C) , β) να τέμνει τον (C) , γ) να είναι εξωτερική του (C) .
9. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
10. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 = 9$. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου η οποία:
- α) είναι παράλληλη στην ευθεία $(\epsilon_1): 2x - y - 1 = 0$
- β) είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon_2): x + 3y - 6 = 0$.
11. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που άγονται από το σημείο $(0, 6)$.
12. Να βρεθούν οι εξισώσεις εφαπτόμενων από το σημείο $(0,0)$ προς τον κύκλο $x^2 + y^2 - 6x + 2 = 0$
13. Δίνονται οι κύκλοι $(C_1): x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 9 = 0$ και $(C_2): x^2 + y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 - 25 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι δύο κύκλοι: α) βρίσκονται ο ένας έξω από τον άλλο, β) εφάπτονται εξωτερικά, γ) τέμνονται, δ) εφάπτονται εσωτερικά, ε) βρίσκονται ο ένας μέσα στον άλλο.
14. Δίνεται η οικογένεια κύκλων $(C): x(x - 1) + y(y - 1) = \lambda(x + y - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον κύκλο αυτής της οικογένειας ο οποίος:
- α) έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $(\epsilon): x + 2y - 6 = 0$,
- β) εφάπτεται στον άξονα xx' .

Μαθηματικά κατεύθυνσης Β' λυκείου

15. Δίνεται η εξίσωση $(C_\lambda): x^2 + y^2 - 6\lambda y - 4 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (C_λ) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

16. Δίνεται η εξίσωση $(C_\lambda): x^2 + y^2 + 2x - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 2y) = 0$. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$. β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (C_λ) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής αυτών των κύκλων

17. Δίνεται η εξίσωση $(C_\lambda): x^2 + y^2 - 2\lambda x + (\lambda + 2)y + 1 = 0$. Να βρείτε: α) τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, β) τον γεωμετρικό τόπο στον οποίο ανήκουν τα κέντρα αυτών των κύκλων

18. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: x \cdot \sin\theta + y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y \cdot \eta\mu\theta = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ κινείται σε κύκλο.

19. Θεωρούμε ένα πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από ένα αριθμό $\eta = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται γύρω από το καρτεσιανό επίπεδο $Ox\psi$ διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 2 \cdot \eta \cdot (x+y-1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος, και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου.

β) Κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A που είναι η φωλιά τους. Ποιες οι συντεταγμένες του A ;

γ) Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x+y-1=0$ στο σημείο A .

20. Να βρείτε τον γ.τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει:

α) $|\overline{MA}| = 2$ όπου $A(2,1)$.

β) $MA \perp MB$ όπου $A(1,0)$ και $B(-1,0)$

γ) $MA = 2 \cdot MB$ όπου $A(1,2)$ και $B(3,1)$

21. Να βρεθεί ο γ.τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $\varepsilon: x = 1$.