<u>ΕΜΒΑΔΑ</u>

<u>ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ</u>

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Ένα ορθογώνιο και ένα τετράγωνο είναι ισεμβαδικά. Αν η βάση του ορθογωνίου είναι 45 και το ύψος του είναι τα $\frac{4}{9}$ της βάσης του, να βρεθεί η πλευρά του τετρα – γώνου .

2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 24, ΑΔ = 32 και $B\widehat{A}\Delta = 60^0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του .

3. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι 8 και 6 αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του .

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με ΑΒ = 27, ΓΔ = 6, ΑΔ = 13 και ΒΓ = 20. Να βρεθεί η προβολή της ΑΔ στην ΑΒ και το εμβαδό του τραπεζίου .

5.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ. Να δειχτεί ότι: (ΔΜΓ) = (ΑΜΔ) + (ΜΒΓ).

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B=45^0$ και η διάμεσος ΑΜ είναι κάθετη στην ΑΒ. Να δειχτεί ότι: $(AB\Gamma)=AB^2$.

7. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 4 και σημείο Σ της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΣ=1. Να βρεθεί η απόσταση του Δ από την ΓΣ.

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=2 και η διάμεσος ΒΔ=1. Αν είναι $B\widehat{\Delta}A=30^0$, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου.

9. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Από τις κορυφές του φέρνουμε παράλληλες προς τις διαγώνιες που τέμνονται στα σημεία Κ,Λ,Μ,Ν. Να δειχτεί ότι: (ΚΛΜΝ) = 2(ΑΒΓΔ).

10.Έστω Κ και Λ τα μέσα των βάσεων τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και Ρ τυχαίο σημείο της ΚΛ. Να δειχτεί ότι:

i) (ΑΚΛΔ)=(ΒΚΛΓ) ii) (ΑΡΔ)=(ΒΡΓ).

11.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του. Φέρνουμε από το Δ παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ,ΑΒ στα σημεία Ζ,Ε αντίστοιχα. Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΒΔ,ΔΓ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: (ΑΒΓ)=2(ΕΖΛΚ).

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Αν Λ,Ν είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: (ΑΛΡΝ)=(ΒΡΛ) + (ΡΝΓ).

13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο προεκτείνουμε τις πλευρές του κατά κυκλική φορά και παίρνουμε πάνω σ'αυτές τμήματα: ΑΘ=ΑΒ,ΔΕ=ΑΔ,ΓΖ=ΓΔ και ΒΗ=ΒΓ. Να δειχτεί ότι: (ΘΕΖΗ)=5(ΑΒΓΔ).

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω Ε το μέσο της διαμέσου ΑΜ, Ζ το μέσο του ΓΕ και Η το μέσο του ΒΖ. Να δειχτεί ότι: (ΑΒΓ)=8(ΕΖΗ).

15. i)Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, να δειχτεί ότι :

$$(\text{ΑΜΝ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ}) .$$

ii) Αν Κ,Λ,Μ,Ν είναι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να δειχτεί ότι:

(ΑΒΓΔ)=2(ΚΛΜΝ).

16. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Αν Μ είναι το μέσο της ΑΔ, να δειχτεί ότι: (ΜΑΒ) + (ΜΓΔ) = (ΜΒΓ).

17. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Αν Η είναι το σημείο τομής της διαμέσου ΕΖ με τη διαγώνιο ΑΓ, να δειχτεί ότι: (ΓΔΕΖ)-(ΑΒΖΕ)=(ΒΗΔ).

18. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) και το ύψος του ΔΖ. Να δειχτεί ότι το εμβαδό του τραπεζίου είναι διπλάσιο από το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΒ.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που περνά από το Α τέμνει την ΒΓ στην προέκτασή της. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ε, να δειχτεί ότι:

(ΜΑΒ) + (ΜΑΓ)=2(ΜΑΚ), όπου Κ το μέσο της ΒΓ.

20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και δεν τέμνει το παραλληλόγραμμο. Αν Ο είναι τυχαίο σημείο της ε, διαφορετικό από το Α, να δειχτεί ότι: (ΟΑΓ) = (ΟΑΒ) + (ΟΑΔ).

21. Να δειχτεί ότι το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό και ίσο με το ύψος που αντιστοιχεί σε μία από τις ίσες πλευρές του.

22. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Ρ τυχαίο εσωτερικό του σημείο. Αν Δ,Ε,Ζ είναι οι προβολές του Ρ στις πλευρές ΒΓ,ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι το άθροισμα ΡΔ+ΡΕ+ΡΖ είναι σταθερό.

ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Σε ευθεία ε δίνονται τα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ έτσι ώστε ΑΒ=2α και ΒΓ=α. Κατασκευάζουμε προς το ίδιο μέρος της ε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΚ και ΒΓΛ. Αν οι ΑΚ και ΓΛ τέμνονται στο σημείο Μ, να δειχτεί ότι: (ΒΚΜΛ)=$α^2\sqrt{3}$.

2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: β+γ=2α, να δειχτεί ότι: βγ=6Rρ.

3. Θεωρούμε τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες xΟψ,ψΟz,zΟx και επί των ημιευθειών Οx,Οψ,Οz τα σημεία Α,Β,Γ αντίστοιχα, ώστε: ΟΑ=1,ΟΒ=4 και ΟΓ=8. Να δειχτεί ότι: (ΑΒΓ) = $11\sqrt{3}$.

4. Αν ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0), να δειχτεί ότι: $\frac{1}{ρ} = \frac{1}{β} + \frac{1}{γ} + \frac{1}{υ_α}$.

5. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχτεί ότι: $\frac{1}{αβ} + \frac{1}{βγ} + \frac{1}{γα} = \frac{1}{2Rρ}$.

6. i) Αν Ο η τομή των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ με εμβαδό Ε και η γωνία ΑΟΔ είναι φ, να δειχτεί ότι: Ε= $\frac{1}{2}$ΑΓ·ΒΔ·ημφ.

ii) Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο με Β=Δ=90^0 και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων. Αν ΟΑ=3, ΟΓ=12, ΟΔ=6 και φ=60^0, να βρεθεί το εμβαδό του ΑΒΓΔ.

7. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων. Αν: (ΟΑΒ)=12, (ΟΒΓ)=9 και (ΟΓΔ)=15, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΔ.

ΕΜΒΑΔΟ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0). Φέρνουμε τις ΑΔ⊥ΒΓ και ΔΕ⊥ΑΓ. Να δείξετε ότι : $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{γ^2}{α^2}$.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και Δ το μέσο της. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΒΔ,ΓΔ να δειχτεί ότι: (ΑΒΓ)=8(ΔΕΖ).

3. Με βάσεις τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΔΕ,ΑΓΙΘ και ΒΓΖΗ. Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΑΕΘ,ΒΔΗ και ΓΙΖ είναι ισεμβαδικά .

4. Προεκτείνουμε τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ κατά κυκλική φορά παίρνοντας στις προεκτάσεις τμήματα: ΑΓ΄=ΑΓ, ΒΑ΄=ΒΑ και ΓΒ΄=ΓΒ. Να δειχτεί ότι: (Α΄Β΄Γ΄)=7(ΑΒΓ).

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε,Ζ σημεία των πλευρών ΒΓ,ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Αν ΑΖ= $\frac{1}{3}$ΑΒ, ΓΔ= $\frac{1}{4}$ ΒΓ και ΓΕ= $\frac{1}{2}$ΑΓ, να δειχτεί ότι: $\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{5}{24}$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στις πλευρές του ΒΓ,ΓΑ και ΑΒ παίρνουμε τα σημεία Δ,Ε,Ζ τέτοια ώστε: $\frac{ΑΖ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$, $\frac{ΒΔ}{ΒΓ} = \frac{3}{4}$ και $\frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{7}{8}$. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ συναρτήσει των πλευρών α,β,γ του τριγώνου ΑΒΓ.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ το ύψος του και Η το ορθόκεντρο. Να δειχτεί ότι:

$$\frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΗΒ \cdot ΗΓ} = \frac{ΑΔ}{ΗΔ} .$$

8. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ). Να δειχτεί ότι: i) (ΟΒΓ)=(ΟΑΔ) ii) $(ΟΒΓ)^2$=(ΟΑΒ).(ΟΓΔ).

9. Αν Δ,Ε σημεία των πλευρών ΑΒ,ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ με ΔΕ // ΒΓ, να δειχτεί ότι: $(ΑΒΕ)^2=(ΑΓΔ)^2=(ΑΔΕ)\cdot(ΑΒΓ)$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο εσωτερικό του. Από το Ο φέρνουμε κάθετες στις ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ και πάνω σ'αυτές παίρνουμε τμήματα: ΟΔ=ΑΒ,ΟΕ=ΒΓ και ΟΖ=ΑΓ. Να δειχτεί ότι: (ΔΕΖ)=3(ΑΒΓ).

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Παίρνουμε τα σημεία Δ,Ζ στην ΑΒ ώστε: ΑΔ=ΒΖ= $\frac{γ}{3}$, τα σημεία Ε, Ι στην ΑΓ ώστε: ΑΕ=ΓΙ= και τα σημεία Η,Θ στην ΒΓ ώστε: ΒΗ=ΓΘ= $\frac{α}{6}$ Να δειχτεί ότι: (ΖΔΕΙΘΗ)= $\frac{59}{72}$ (ΑΒΓ).

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και Θ το κέντρο βάρους του. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΘΑ, ΘΒ και ΘΓ, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ συναρτήσει των πλευρών του ΑΒΓ.

13. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) και έστω Μ,Ν τα μέσα των διαγωνίων του. Να δειχτεί ότι: (ΝΒΔ)=(ΜΑΓ).

14. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΔΑ,ΕΒ,ΖΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα: ΑΚ=ΑΔ,ΒΛ=ΒΕ και ΓΜ=ΓΖ. Να δειχτεί ότι: (ΚΛΜ)= $\frac{25}{4}$(ΑΒΓ).

15. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ε τυχαίο σημείο της ΜΓ. Φέρνουμε από το Μ παράλληλη στην ΑΕ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Να δειχτεί ότι: (ΔΒΕ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ).

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, Σ τυχαίο σημείο της ΒΓ και ευθεία ε κάθετη στην ΑΣ που διέρχεται από το Α. Αν ΒΚ,ΓΛ οι αποστάσεις των Β,Γ από την ε, να δειχτεί ότι: (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ΑΣ·ΚΛ.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο $Α_1$ της ΒΓ. Από τα σημεία Β και Γ φέρνουμε παράλληλες στην $ΑΑ_1$ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα στα $Β_1$ και $Γ_1$. Να δειχτεί ότι: $(Α_1Β_1Γ_1)$=2(ΑΒΓ).

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στη ΒΓ παίρνουμε σημεία Κ,Λ έτσι ώστε: ΒΚ=ΚΛ=ΛΓ και Μ τυχαίο σημείο της ΚΛ. Αν η ΚΖ//ΑΜ και η ΛΗ//ΑΜ τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: (ΒΜΖ)=(ΓΜΗ)=(ΑΖΜΗ).

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του φέρνουμε τις ΜΔ⊥ ΒΓ, ΜΕ⊥ ΑΓ και ΜΖ⊥ ΑΒ. Αν $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$ είναι τα ύψη του ΑΒΓ, να δειχτεί ότι:

$$\frac{ΜΔ}{υ_α}+\frac{ΜΕ}{υ_γ}+\frac{ΜΖ}{υ_γ}=1\,.$$

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ που τέμνει το ύψος ΑΔ στο Ε. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, να δειχτεί ότι:

i) $ΔΕ^2$=ΔΑ·ΔΗ   ii) $\frac{(ΕΒΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΗΒΓ)}{(ΕΒΓ)}$.

21. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει α=17cm, β=8cm και γ=15cm.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο .

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω Δ σημείο της υποτείνουσας ΒΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Αν (ΑΒΔ)=E_1 και (ΑΓΔ)=E_2, να δειχτεί ότι: $\frac{E_1^2}{\gamma^2}+\frac{E_2^2}{\beta^2}=\frac{A\Delta^2}{4}$.

2. Στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Μ και Ν. Αν (ΑΝΒ)=19 και (ΓΜΔ)=91, να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου.

3.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=70, ΓΔ=20 και μη παράλληλες πλευρές ΒΓ=40 και ΑΔ=30.

i) Να δειχτεί ότι: ΒΓ$\perp$ ΑΔ   ii) Να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου.

4.Έστω ΑΒΓΔ εγγράψιμο τετράπλευρο και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να δειχτεί ότι: $\frac{(OBA)}{(O\Gamma\Delta)}=\frac{AB^2}{\Gamma\Delta^2}$.

5. Από το μέσο Κ της πλευράς ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90^0) φέρνουμε την κάθετη στη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Λ. Αν ισχύει: (ΑΒΛΚ)= $\frac{13}{16}$ (ΑΒΓ), να βρεθεί η γωνία Β.

6. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων. Αν υ το ύψος του, να δειχτεί ότι: (ΟΔΓ) - (ΟΑΒ) = $\frac{\Delta\Gamma - AB}{2}\upsilon$.

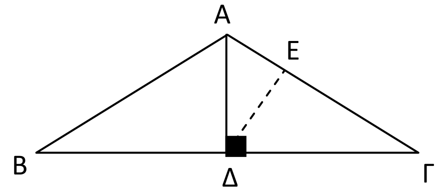
7. Στην πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ,Ε έτσι ώστε: ΒΔ=ΓΕ< $\frac{\alpha}{2}$. Η παράλληλη προς την ΑΒ από το Δ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και οι ΒΖ,ΑΕ τέμνονται στο Θ. Να δειχτεί ότι: (ΘΑΒ)=(ΘΕΓΖ).

8. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να δειχτεί ότι: $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{AB\cdot A\Delta}{\Gamma B\cdot \Gamma\Delta}$.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με ΑΒ = 6 και $B\widehat{A}\Gamma = 120^0$.

α) Να βρεθεί το (ΑΒΓ) .

β) Αν Ε σημείο της ΑΓ, τέτοιο ώστε ΑΕ= $\frac{1}{2}$ ΕΓ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΓ.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα .
2. Αν ένα τρίγωνο χωρίζεται από μία διχοτόμο του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τότε είναι ισοσκελές .
3. Ένα τρίγωνο χωρίζεται από μία διάμεσο του σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα .
4. Δύο ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα .
5. Ο τύπος του Ήρωνα ισχύει μόνο σε ορθογώνια τρίγωνα .
6. Δύο τρίγωνα όμοια και ισεμβαδικά είναι ίσα .
7. Δύο ισοδύναμα τετράγωνα είναι ίσα .
8. Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δύο βάσεων τραπεζίου το διαιρεί σε δύο ισοδύ – ναμα τραπέζια .
9. Αν οι πλευρές τετραγώνου αυξηθούν κατά 4cm η καθεμία, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά $16cm^2$.
10. Τετράγωνο πλευράς α είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ίσης με τη διαγώνιο του τετραγώνου .
11. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, β είναι ισοδύναμο με τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου .
12. Ρόμβος με διαγωνίους δ_1, δ_2 είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις διαγωνίους δ_1, δ_2 του ρόμβου .
13. Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2α είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς α .
14. Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α είναι ισοδύναμο με ρόμβο πλευράς α και ο – ξείας γωνίας 60^0 .
15. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ με εμβαδό $4\sqrt{3}\ cm^2$ είναι ίση με 4cm .
16. Το εμβαδόν τετραγώνου με διαγώνιο δ είναι ίσο με $2\delta^2$.