<u>ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ</u>

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$).Φέρνουμε τις διαμέσους ΑΜ και ΒΝ που τέμνονται στο Θ. Αν ΒΓ= $α\sqrt{2}$ να υπολογιστούν με τη βοήθεια του α:
   i) το ΒΝ ii) το άθροισμα ΘΜ + ΘΝ.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$). Αν ΒΜ διάμεσός του, να δειχτεί ότι: $ΒΜ^2 + \frac{3}{4}ΑΓ^2 = ΒΓ^2$.

3. Αν Μ τυχαίο σημείο στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ οι προβολές του Μ στις ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι:
   $ΒΔ^2 + ΓΕ^2 + ΑΖ^2 = ΔΓ^2 + ΕΑ^2 + ΖΒ^2$.(θεώρημα Carnot)

4. Αν Ε είναι τυχαίο σημείο του ύψους ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ ,να δειχτεί ότι:

   $ΑΓ^2-ΑΒ^2 = ΕΓ^2-ΕΒ^2$.

5. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και Κ ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να δειχτεί ότι:

   $ΑΒ^2-ΒΚ^2= ΑΚ\cdot ΚΓ$.

6. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ. Να δειχτεί ότι:

   i) $ΑΒ^2-ΑΕ^2 = ΕΒ\cdot ΕΔ$ ii) $ΒΕ^2 + ΕΔ^2 = 2ΑΕ^2$.

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τις $ΔΕ \perp ΑΒ$ και $ΔΖ \perp ΑΓ$. Να δειχθεί ότι : $\frac{β^3}{γ^3} = \frac{ΓΖ}{ΒΕ}$.

8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) με $Α=Β=90^0$.Αν Θ, Η είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: $ΔΓ^2-ΑΒ^2 = 4ΗΘ^2$.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι:
   $ΑΔ^2 = ΕΑ\cdot ΕΒ + ΖΑ\cdot ΖΓ$.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) με Β=2Γ. Να δειχτεί ότι:$ΑΓ^2=3ΑΒ^2$.

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) και στην κάθετη πλευρά ΑΒ παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ. Να δειχτεί ότι: $ΒΓ^2 + ΑΜ^2 = ΑΒ^2 +ΓΜ^2$.

12. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}ψ =45^0$ και σημείο Μ στο εσωτερικό της. Από το Μ φέρνουμε κάθετη στην Οx που την τέμνει στο Α και την Οψ στο σημείο Β. Να δειχτεί ότι: $ΑΒ^2 +ΑΜ^2 = ΟΜ^2$.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
σε τυχαίο τρίγωνο

Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχτεί ότι:
   i) $A=30^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma\sqrt{3}$

   ii) $A=45^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma\sqrt{2}$

   iii) $A=60^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$

   iv) $A=120^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$
   v) $A=135^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{2}$

   vi) $A=150^0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$

2. Να υπολογιστεί η πλευρά ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, αν γνωρίζουμε ότι:
   i) $B=30^0$, ΒΓ=8 και ΑΒ=12
   ii) $B=60^0$, ΒΓ=8 και ΑΒ=6.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=3, ΒΓ=5 και ΑΓ=7. Να δειχτεί ότι:
   i) Η γωνία Β είναι αμβλεία.
   ii) Να υπολογιστεί η προβολή ΒΔ της πλευράς ΑΒ στη ΒΓ.
   iii) Να υπολογιστεί η γωνία Β.

4. Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ το οποίο έχει πλευρές:
   i) $\alpha = 8\lambda$, $\beta=15\lambda$, $\gamma=17\lambda$
   ii) $\alpha = \lambda$, $\beta=\frac{\lambda}{2}$, $\gamma=\frac{2\lambda}{3}$
   iii) $\alpha = \sqrt{\lambda^2+\lambda+1}$, $\beta=\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}$, $\gamma=\sqrt{\lambda^2+1}$ $(\lambda>0)$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=4, $ΒΓ=2+\sqrt{3}$ και $ΑΓ = \sqrt{15}$. Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Να υπολογιστεί η γωνία Β.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=2, $ΒΓ=1+\sqrt{3}$ και $ΑΓ =\sqrt{6}$. Να δειχτεί ότι: $\widehat{B}=60^0$.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ευθεία παράλληλη στη βάση του που τέμνει τις ΑΒ,ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Να δειχτεί ότι:
   $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ\cdot ΔΓ$.

8. Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και Μ τυχαίο σημείο της διαγωνίου ΒΔ, να δειχτεί ότι: $ΑΒ^2 = ΑΜ^2 + ΒΜ\cdot ΔΜ$.

9. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ). Να δειχτεί ότι:
   $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ\cdot ΑΔ$.

10. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και φέρνουμε τις ΑΚ ⊥ ΒΔ και ΓΛ⊥ΒΔ. Να δειχτεί ότι: $ΑΔ^2 + ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΓΔ^2 + 2ΒΔ\cdot ΚΛ$.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α. Φέρνουμε ΔΕ⊥ΑΒ. Να δειχτεί ότι: $2ΑΒ\cdot ΑΕ = ΑΒ^2 + ΑΕ^2 – ΕΒ^2$.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ που έχει $Α=135^0$ και $Β=15^0$. Να δειχτεί ότι: $α =(1+\sqrt{3})β$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να δείξετε ότι :
$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΔΑ^2 = ΑΓ^2 + ΒΔ^2$.

2. Να βρείτε το είδος του τριγώνου που έχει διαμέσους με μήκη 3, 4, 5 .

3. Να δείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^0$) ισχύει :
α) $α^2 + β^2 + γ^2 = 8μ^2_α$

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι διάμεσοι $μ_β$, $μ_γ$ τέμνονται κάθετα. Να δειχτεί ότι: i) $μ_β^2 + μ_γ^2 = μ_α^2$ ii) $β^2 + γ^2 = 5α^2$.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Γ=120^0$. Να δειχτεί ότι: $μ_γ = \frac{\sqrt{α^2+ β^2-αβ}}{2}$.

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχτεί ότι:
i) $β^2 + γ^2 = 2α^2 \Leftrightarrow μ_β^2 + μ_γ^2 = 2μ_α^2$.

ii) $μ_α^2 = βγ \Rightarrow α = \sqrt{2}\,|β-γ|$.

8. Αν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ είναι ίσες χορδές ενός κύκλου (O,R) να δειχτεί ότι:
$ΑΓ^2 – ΑΒ^2 = ΑΒ\cdot ΑΔ$.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) και η διάμεσός του ΑΜ. Στο σημείο Μ φέρνουμε κάθετη ευθεία προς την ΑΜ. Αν Σ είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας αυτής, να δειχτεί ότι: $ΣΒ^2 + ΣΓ^2 = 2ΣΑ^2$.

10. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και το τμήμα ΜΕ ⊥ ΑΜ (το Ε ανήκει στην ΑΓ). Αν : $ΒΕ^2 + ΕΓ^2 = 2\ ΑΕ^2$, να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α .

11. Στην πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ,Ε τέτοια ώστε: ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να δειχτεί ότι: $γ^2 + 2β^2 = 3ΑΕ^2 + 6ΔΕ^2$.

12. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $ΓΕ = \frac{ΒΓ}{2}$. Να δειχτεί ότι: $ΑΕ^2 – ΑΒ^2 = 3(ΑΓ^2 – ΑΔ^2)$.

13. Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει η ισοδυναμία:
$ΑΓ \perp ΒΔ \Leftrightarrow ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΓΒ^2 + ΑΔ^2$.

14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην υποτείνουσα ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε: ΕΓ=ΕΖ=ΖΒ. Να δειχτεί ότι:
$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΑΕ^2 + \frac{4}{9} ΒΓ^2$.

15. Αν τα σημεία Δ,Ε τριχοτομούν την υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (δηλαδή: ΒΔ =ΔΕ=ΕΓ), να δειχτεί ότι:
i) $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9} α^2$ ii) $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + ΔΕ^2 = \frac{2}{3} α^2$

16. Αν Ε,Ζ,Η,Θ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ να δειχτεί ότι: $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = 2(ΕΗ^2 + ΘΖ^2)$.

17. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ,ΒΓΕ εκατέρωθεν της ΒΓ. Να δειχτεί ότι: $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$.
Ποια σχέση πρέπει να επαληθεύουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε να ισχύει: $ΑΔ \perp ΑΕ$;

18. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $BGΓ=60^0$, όπου G το βαρύκεντρο του τριγώνου.Να δειχτεί ότι: $μ_β \cdot μ_γ = \frac{β^2 + γ^2 - 5α^2}{4}$.

19. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Γ έτσι ώστε: $ΓΔ = \frac{1}{2} ΒΓ$. Να δειχτεί ότι: $4ΑΔ^2 = 7ΒΓ^2$.

20. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του εγγεγραμμένου κύκλου του, να δειχτεί ότι: $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 = \frac{5α^2}{4}$.

<u>ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ</u>

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. i) Να δειχτεί ότι η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί τις κοινές τους εξωτερικές εφαπτόμενες.
ii) Να δειχτεί ότι οι εφαπτόμενες που άγονται προς δύο τεμνόμενους κύκλους από τυχαίο σημείο της ευθείας της κοινής τους χορδής είναι ίσες.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και η διχοτόμος ΑΔ. Να δειχτεί ότι: $ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΑΓ - ΔΒ \cdot ΔΓ$.

3. Από ένα σημείο Μ που βρίσκεται έξω από κύκλο (Ο,R) φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΑ και μία τέμνουσα ΜΒΓ. Να δειχτεί ότι: $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{ΜΒ}{ΜΓ}$.

4. Στη διάμετρο ΑΒ ενός κύκλου (O,R) θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ έτσι ώστε να ισχύει: ΟΓ=ΟΔ=α και τυχαίο σημείο Μ του κύκλου. Αν οι ΜΓ,ΜΔ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ε,Ζ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: $\frac{ΓΜ}{ΓΕ} + \frac{ΔΜ}{ΔΖ} = \frac{2(R^2+ α^2)}{R^2-α^2}$.

5. Έστω κύκλος (O,R) και σημείο Ρ έξω απ' αυτόν. Φέρνουμε τη διάμετρο ΡΒΑ και την εφαπτομένη ΡΓ. Στο σημείο Ρ και επί της ΡΑ φέρνουμε κάθετη που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ. Να δειχτεί ότι: $ΡΑ^2- ΡΓ^2 = ΑΓ\cdot ΑΔ$.

6. Με πλευρά τη χορδή ΑΒ=1 κύκλου (O,R) κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ που η πλευρά του ΒΓ δεν έχει σημείο εσωτερικό του κύκλου. Αν το εφαπτόμενο τμήμα ΓΚ =2, να υπολογιστεί η ακτίνα R του κύκλου.

7. Έστω ΑΒ,ΓΔ χορδές κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας R=5 οι οποίες τέμνονται στο Σ. Αν ΑΣ=3, ΣΔ=6 και η δύναμη του Σ ως προς τον κύκλο είναι -12, να βρεθεί το μήκος των χορδών και η απόσταση ΟΣ.

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Δ. Να δειχτεί ότι: $ΜΔ = \frac{α\sqrt{3}}{6}$.

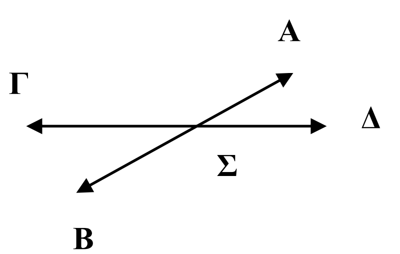
9. Αν οι χορδές ΑΓ,ΒΔ ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ τέμνονται στο σημείο Ε, να δειχτεί ότι: $ΑΕ\cdot ΑΓ + ΒΕ\cdot ΒΔ = ΑΒ^2$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ο κύ**κ**λος διαμέτρου ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: $ΒΓ^2 = ΑΓ\cdot ΓΕ + ΑΒ\cdot ΒΔ$.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και Θ το κέντρο βάρους του. Αν η διάμεσος ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Η, να δειχτεί ότι η δύναμη του Θ ως προς τον κύκλο είναι: $-\frac{1}{9}(α^2 + β^2 + γ^2)$.

12. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε: $ΒΔ= \frac{3}{4}ΒΓ$. Αν η ευθεία ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ε, να υπολογίσετε το τμήμα ΔΕ συναρτήσει του α.

13. Από τη διασταύρωση Σ δύο δρόμων ξεκινούν 4 άτομα με κατευθύνσεις τα Α,Β,Γ,Δ και με ταχύτητες 2,9,3,6 km/h αντίστοιχα. Μετά από 1h σταματούν στις θέσεις $Α_1,Β_1,Γ_1,Δ_1$ αντίστοιχα.
   i) Να δειχτεί ότι υπάρχει σημείο του επιπέδου από το οποίο τα 4 άτομα ισαπέχουν.
   ii) Να δειχτεί ότι μετά από ν ώρες για τις θέσεις $Α_ν$, $Β_ν$, $Γ_ν$, $Δ_ν$ υπάρχει άλλο σημείο Λ από το οποίο ισαπέχουν.



Αν R η κοινή απόσταση των $Α_ν,Β_ν,Γ_ν,Δ_ν$ από το Λ, να δειχτεί ότι: $ΣΛ^2 = R^2 - 18ν^2$.

14. Κατά μήκος της πλευράς ΒΓ μιας τριγωνικής πλατείας ΑΒΓ πρόκειται να γίνει μια έκθεση βιβλίου. Στα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα θα τοποθετηθούν δύο κάμερες. Αν ΑΕ=4, ΕΒ=2, ΔΑ=3 και ΔΓ=5, να αποδείξετε ότι οι κάμερες βλέπουν με την ίδια γωνία την έκθεση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Ισχύει $α^2 > β^2 + γ^2$.

2. Αν γ η μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και $γ^2 > α^2 + β^2$, τότε αυτό είναι αμβλυγώνιο .

3. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Ισχύει $β^2 < α^2 + γ^2$.

4. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β,γ ισχύει $β^2 < α^2 + γ^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο .

5. Για τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ, ισχύει $ΑΒ^2 = ΒΓ\cdot ΒΔ$.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} < 90^0$ ισχύει $ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

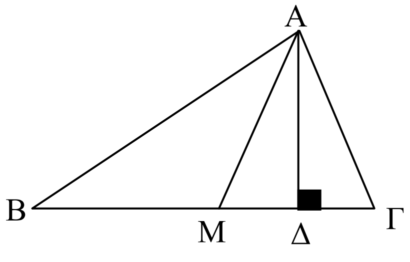
7. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ ισχύουν ταυτόχρονα $α^2 < β^2 + γ^2$, $β^2 < α^2 + γ^2$ $γ^2 < α^2 + β^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο .

8. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ για το οποίο να ισχύουν ταυτόχρονα : $α^2 > β^2 + γ^2$, $β^2 < α^2 + γ^2$, $γ^2 > α^2 + β^2$.

9. Το τρίγωνο που έχει μήκη πλευρών 5, 7, 9 είναι οξυγώνιο .

10. Αν γνωρίζουμε τις διαμέσους ενός τριγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πλευρές του .

11. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος. Ισχύει η σχέση : $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΔΜ^2}{2}$



12. Στο διπλανό σχήμα με ΟΑ= R, ΟΡ=δ ισχύει η σχέση $ΡΑ\cdot ΡΒ=R^2 – δ^2$.