Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
   i) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ii) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{O\Delta}$
   iii) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\Delta}$ iv) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}}) = (\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{A\Gamma}})$.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
   i) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ii) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Gamma}$ iii) $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{\Gamma B}$
   iv) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{O\Delta}$ v) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$.

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του. Να βρείτε τις γωνίες:
   i) $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}})$ ii) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma A}})$ iii) $(\widehat{\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Delta A}})$ iv) $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{A\Delta}})$.

4. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε ισχύουν οι ισότητες: $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{\Delta A}$, να δείξετε ότι το Δ είναι το μέσο του ΓΕ.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και έστω ΒΕ και ΓΔ τα ύψη του. Φέρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{\Gamma A}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΗΖ είναι ισοσκελές.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ –ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B}$.

2. Αν Ο τυχαίο σημείο τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\Gamma O} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA}$.

3. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να δειχτεί ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, να δείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ ταυτίζονται.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ. Ορίζουμε το σημείο Μ από την σχέση: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}$. Να δείξετε ότι το ΑΒΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

6. Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. Ορίζουμε τα σημεία Δ και Ε από τις σχέσεις: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Να δείξετε ότι το Γ είναι το μέσο του ΔΕ.

7. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και Μ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου του τριγώνου. Έστω Ι ένα σημείο τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{AB}$. Να δείξετε ότι το Ι είναι ένα σταθερό σημείο του επιπέδου του τριγώνου.

8. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ώστε: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{H\Gamma}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \overrightarrow{A\Theta}$. Να δείξετε ότι το ΗΖΕΘ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Εξωτερικά ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ και ΒΓΚΛ. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{ZK} + \overrightarrow{\Lambda\Delta} = \vec{0}$.

10. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει ότι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{4}$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

1. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Να παρασταθεί στο επίπεδο η λύση:
   α) της εξίσωσης: $2(2\vec{x} + \vec{\alpha}) = 3(\vec{x} + \vec{\alpha}) - 2(\vec{x} + \vec{\beta})$,
   β) του συστήματος: $\begin{aligned} 2\vec{x} + \vec{y} &= 5\vec{\alpha} \\ \vec{x} - 2\vec{y} &= 5\vec{\beta} \end{aligned}$

2. Έστω Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.

3. Έστω Ο το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι για κάθε σημείο του επιπέδου του παραλληλογράμμου ισχύει: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MO}$.

4. Έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{K\Lambda}$.

5. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) στο οποίο (ΔΓ)=3(ΑΒ). Αν Κ, Λ τα μέσα των ΔΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
   i) $2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{BA}$
   ii) το τετράπλευρο ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε τα οποία χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα την πλευρά ΒΓ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ ώστε να ισχύει: 2ΒΔ=3ΓΔ. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\beta}$. Αν Ε είναι μέσο του ΑΒ και ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{BZ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, να εκφράσετε συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}, \overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}}, \overrightarrow{\mathrm{EZ}}$.

9. Αν Α, Β, Γ, Δ με $\Gamma \neq \Delta$ σημεία του επιπέδου και $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$, να βρεθεί ο $x \in R$ αν: $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} = x\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

10. Αν τα σημεία Β, Γ είναι διαφορετικά και ισχύει $2\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + 3\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \vec{0}$, να βρεθεί ο $x \in R$ αν: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} = x\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

11. Αν οι διανυσματικές θέσεις των σημείων Α, Β, Γ, Δ ως προς το Ο είναι αντίστοιχα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.

12. Αν το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι μοναδιαίο και $\vec{\alpha} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$, $\vec{\beta} = 5\vec{v} - 2\vec{u}$, να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{v}$ και να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}$. Αν Ρ το μέσο της διαμέσου ΑΜ και Κ το μέσο της ΔΕ, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{PK}} \,//\, \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

14. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $|\vec{\gamma}|=3$, να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 2\vec{\gamma} \neq \vec{0}$$

<u>ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ</u>

15. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου. Αν $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι το Γ είναι το μέσο του ΑΒ.

16. Αν ισχύει: $9\overrightarrow{\mathrm{KA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{KB}} - 7\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} = \vec{0}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Όμοια αν: $\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

17. Δίνονται τα σημεία Ο, Μ, Α, Β, Γ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

18. Για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει: $2\kappa\overrightarrow{OA}+(1-2\kappa)\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{O\Gamma}-2\overrightarrow{OB}$, κ∈R. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αν Ο τυχαίο σημείο αναφοράς. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του κ, τα σημεία είναι διακεκριμένα.

19. Έστω Ο, Α, Β, Γ τέσσερα σημεία του χώρου. Αν υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in R$, όχι όλοι μηδέν με $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$ και $\kappa_1\overrightarrow{OA}+\kappa_2\overrightarrow{OB}+\kappa_3\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$, (1) , να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Αντίστροφα: αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά., να δείξετε ότι για κάθε σημείο Ο του επιπέδου υπάρχουν κ_1, κ_2, $\kappa_3 \in R$ με $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$, έτσι ώστε να ισχύει η (1).

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ στις ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ώστε: $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά..

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά..

22. Στην πλευρά ΔΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{\Delta E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Αν Κ σημείο του επιπέδου του παραλληλογράμμου τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{A\Delta}$, να δείξετε ότι τα σημεία Ε, Κ, Β είναι συνευθειακά.

23. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Μ των ΑΔ, ΑΓ αντίστοιχα με $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Ε, Μ, Β είναι συνευθειακά και $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{EM}$.

ΕΥΡΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Κ τέτοιο ώστε να ισχύει: $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:. $\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{\Gamma M}$.

26. Να βρεθεί σημείο Ο του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ για το οποίο είναι: $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ ισχύει: $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{11}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{11}\overrightarrow{BM}+\frac{6}{11}\overrightarrow{\Gamma M}$.

27. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{0}$.

28. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:.
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{M\Delta}$.

ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα
$\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

30. Έστω Α, Β, Γ τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ε του επιπέδου Οχψ. Να δείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου Οχψ, το διάνυσμα
$\vec{u}=\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

31. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι το διάνυσμα
$\vec{u}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{M\Gamma}-4\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΜΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

32. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν ισχύει: $\kappa\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι : $\kappa=\lambda=0$. **[ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ]**

33. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα.
α) Αν: $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}$, τότε: $\lambda=x$ και $\mu=y$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$, τα διανύσματα: $\vec{u}=(3x-1)\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{w}=(x+1)\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

34. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$, τα διανύσματα: $\vec{u}=(2x+1)\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{w}=\left(\frac{x^2}{2}+8\right)\vec{\alpha}+(x+4)\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν ισχύει:
$\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}=3\overrightarrow{B\Gamma}+2\overrightarrow{AM}$, να βρείτε τα κ, λ.

36. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου Οχψ. Αν
$\overrightarrow{OA}=(x+1)\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2x\vec{\alpha}+(3x-1)\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=-\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, να βρείτε το $x\in R$.

37. Θεωρούμε τα σημεία Ο, Α, Β τα οποία δεν είναι συνευθειακά. Σε κάθε $\lambda\in R$ αντιστοιχίζουμε τα διανύσματα: $\overrightarrow{O\Delta}=\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OB}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in R$ τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Delta},\overrightarrow{OE}$ δεν είναι συγγραμμικά.

38. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του επιπέδου μη συγγραμμικά ανά δύο. Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά καθώς και τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, να δείξετε ότι τα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

39. Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να δείξετε ότι:
α) τα $\vec{u}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{w}=\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
β) τα $\vec{x}=9\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και $\vec{y}=3\vec{\alpha}-\frac{5}{3}\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

40. Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}-(\lambda+1)\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

41. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ της ΒΓ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AP}=(\lambda+1)\overrightarrow{AB}-(3\lambda+2)\overrightarrow{\Gamma A}$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R$.

42. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της ΒΓ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{M\Gamma}$. Αν η ΑΜ τέμνει τη διάμεσο ΓΔ στο Ε και ισχύει: $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\lambda\overrightarrow{\Gamma E}$, να υπολογιστεί ο $\lambda\in R$.

43. α) Έστω Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma})$.
β) Έστω Ε, Ζ σημεία των πλευρών ΑΒ, ΔΓ τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}=\lambda\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ $(\lambda\neq 0)$. Να δείξετε ότι το μέσο Ι του ΕΖ ανήκει στην ευθεία ΜΝ.

44. Έστω Ι το μέσο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ και Μ, Ν σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AN}=\nu\overrightarrow{A\Gamma}$ με $\mu,\nu\in R$. Να δείξετε ότι:
i) $\overrightarrow{IM}=(\mu-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{IN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(\nu-\frac{1}{2})\overrightarrow{A\Gamma}$
ii) τα σημεία Ι, Μ, Ν είναι συνευθειακά αν και μόνον αν: $\mu+\nu=2\mu\nu$.

45. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται σημείο Ρ επί της ΒΓ ώστε: $\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\nu\overrightarrow{A\Gamma}$ (1) με $\mu,\nu\in R^*$.Να δείξετε ότι: $\mu+\nu=1$ (2). Αντίστροφα, αν ισχύουν οι (1) και (2), να δείξετε ότι το σημείο Ρ βρίσκεται στην ΒΓ.

46. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Μία ευθεία τέμνει τις ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ στα σημεία Κ, Λ, Μ αντίστοιχα. Αν: $\overrightarrow{AK}=\lambda_1\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Lambda}=\lambda_2\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AM}=\lambda_3\overrightarrow{A\Gamma}$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\lambda_3}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$ $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0)$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

47. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι: $\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma M}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$.

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι: $\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$, $\lambda \in R$.

49. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta}\right|$.

50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία το διάνυσμα $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}$ είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{B\Gamma}$.

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΓΔ με $\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|=3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι: $3\left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{M\Gamma}\right|$.

52. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου του.
    α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε:
    $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{M\Delta}$.
    β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ αν:
    $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}\right|$.

53. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Μ. Αν $\vec{u} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} - 2\overrightarrow{MA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}$ μεταβλητά διανύσματα με αρχή το Μ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι: α) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ β) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

<u>ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ</u>

1. Δίνονται τα σημεία Α(0,4), Β(5,-3) και Γ(-1,-2). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ, αν $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

2. Έστω το σημείο Α(-1,2).Να βρείτε:
   α) το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, όταν Β(-3,0)
   β) το σημείο Γ, όταν $\overrightarrow{A\Gamma}=(-3,-5)$
   γ) το σημείο Δ, όταν $2\overrightarrow{A\Delta} - 3\overrightarrow{\Delta E} = \vec{0}$ και Ε(3,-1).

3. Δίνονται τα σημεία Α(λ+2,1-λ), Β(3λ+2,5λ) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(3,4)$. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, ώστε: $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

4. Έστω $\overrightarrow{OA}=(2,4)$, $\overrightarrow{OB}=(3,1)$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=(5,-5)$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

5. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(0,4) και Γ(-2,8). Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και να βρεθεί ο $\lambda \in R$, ώστε: $\overrightarrow{ΑΓ} = \lambda\overrightarrow{ΓΒ}$.

6. Δίνονται τα σημεία Α(-6,4κ), Β(λ^2-5λ, $2\kappa^2$+κ+2) και Γ(λ^2-3-4κ,$2\kappa^2$+4κ-7λ+1). Να βρεθούν οι κ, λ $\in$R, ώστε: $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΑΓ}$.

7. Δίνονται τα σημεία Α(3,-1) και Β(2,-1). Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου Μ του Α ως προς το Β.

8. Αν τα σημεία Κ(4,5), Λ(2,8) και Μ(3,6) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

9. Αν οι τρεις κορυφές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι: Α(-1,6), Β(2,1) και Γ(4,4), να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

10. Δίνονται τα σημεία Β(1,1) και Γ(5,7). Να βρεθεί σημείο Α του άξονα x′x ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Α

11. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(1,5). Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα y′y ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Β.

12. Να βρεθεί το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, αν Α(6,4), Β(0,2) και Γ(7,1).

13. Σ' ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης: x^2-(λ^2-5λ+14)x-7=0, ενώ οι τεταγμένες ρίζες της: y^2-(λ^2+3λ+2)y-5=0. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να είναι το σημείο Μ(4,6).

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{ΑΒ}$=(2,-2) και $\overrightarrow{ΑΓ}$=(-5,-1). Αν Μ σημείο του επιπέδου του τριγώνου με $\overrightarrow{ΑΜ} = \left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$, να δείξετε ότι το Μ ανήκει στην πλευρά ΒΓ.

15. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(1,2) και $\vec{\beta}$=(-2,1). Αν: $\overrightarrow{ΟΑ}$=(λ+1)$\vec{\alpha}$+3$\vec{\beta}$, $\overrightarrow{ΟΒ} = 2\lambda\vec{\alpha} + (3\lambda-1)\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΟΓ} = -\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$, να βρεθεί ο $\lambda \in R$, ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

16. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(1,2), $\vec{\beta}$=(5,3) και $\vec{\gamma} = (7,4)$.
    α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά.
    β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

17. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v} = (3,4)$ σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$=(-2,1), $\vec{\beta}$=(3,2).

18. Έστω $\overrightarrow{ΟΑ}$=(x+1,x), $\overrightarrow{ΟΒ}$=(2x-1,x-1) και $\overrightarrow{ΟΓ}$=(-1,3). Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $x \in R$.

19. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\alpha}$ που έχει το ίδιο μέτρο με το διάνυσμα $\vec{\beta}=(4,-3)$ και τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\gamma}=(1,\sqrt{3})$.

20. Να βρείτε τα διανύσματα τα οποία έχουν μέτρο $3\sqrt{5}$ και είναι παράλληλα προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-1,2)$.

21. Να βρεθεί διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{\alpha}=(4,-3)$ που να έχει μέτρο 2.

22. Να βρεθεί διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}=(1,4)$ με μέτρο $\sqrt{17}$.

23. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$, για το οποίο ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha}=(-4,-2)+|\vec{\alpha}|(1,1)$.

24. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}=(|\vec{\beta}|,\ 2\sqrt{2})$ και $\vec{\beta}=(|\vec{\alpha}|-4,0)$.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(3x,3)$ και $\vec{v}=(-4,-x)$.
   α) Να βρεθούν οι τιμές του $x\in R$, ώστε: $(\vec{u}+2\vec{v})\ //\ (3\vec{u}+5\vec{v})$.
   β) Για ποια από τις παραπάνω τιμές του $x\in R$ είναι $\vec{u}\uparrow\downarrow\vec{v}$;
   γ) για την παραπάνω τιμή του x, να βρεθεί διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{u}$ που να έχει μέτρο το μισό του $|\vec{v}|$.

26. Αν $\vec{\alpha}=2\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{\beta}=3\vec{i}-\vec{j}$ και ισχύει: $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.

27. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα x′x σε κάθε περίπτωση:
   α) Α(3,0) Β(0,-$\sqrt{3}$)   β) Α(1,5) Β(-2,5)   γ) Α(3,-2) Β(3,2)

28. Αν $\vec{\alpha}=\left(\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|,-\sqrt{3}\right)$, να βρεθεί:
   α) το μέτρο του $\vec{\alpha}$.
   β) η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x′x.

29. Δίνονται τα σημεία Α(λ-3,2) και Β(3λ,λ-3). Να βρεθεί ο λ, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία $\frac{7\pi}{4}$.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ορισμός

1. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

   α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2$ γ) $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ δ) $(2\vec{\alpha}-\frac{1}{2}\vec{\beta})^2$.

2. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{3\pi}{4}$, να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος: $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

3. Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Επίσης είναι $|\vec{\alpha}|=3$ και $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=15$. Αν $|\vec{\alpha}|<|\vec{\beta}|$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

4. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $|\vec{\alpha}|=1$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=\sqrt{3}$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

5. Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$, να βρείτε τη γωνία ω=$(\vec{\alpha},\vec{\gamma})$.

6. Αν $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|=2\sqrt{5}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=120^0$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, να υπολογίσετε:

   α) το $|\vec{v}|$ β) τις γωνίες $(\vec{\alpha},\vec{v})$, $(\vec{v},\vec{\beta})$.

7. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

8. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι:

   α) $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\perp 3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ β) $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$.

9. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{34}$. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

10. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(3\vec{\alpha}-5\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

11. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{7}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

12. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να δείξετε ότι:
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-4$.

13. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+4\vec{\gamma}=\vec{0}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

14. Αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+4\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε:
α) να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
β) να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων και $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
γ) να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}=3\vec{\beta}$.

αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου

15. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(1,3)$, να βρεθούν τα εσωτερικά γινόμενα:
α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ β) $(-\vec{\alpha})(2\vec{\beta})$ γ) $\vec{\alpha}^2$ δ) $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$

16. Έστω τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-1,2)$. Να βρεθούν:
α) οι παραστάσεις: $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$, $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})$, $|\vec{\alpha}^2(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\vec{\alpha}|$,
β) τα διανύσματα $\vec{v}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha}$.

17. α) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,0)$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R^*$ ώστε $(\lambda\vec{\alpha})\perp(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})$.
β) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R$, ώστε $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})$.

18. Έστω τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=(1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,1)$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Όμοια αν: $\vec{\alpha}=(1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},3)$.

19. Αν Α(4,1), Β(8,2) και Γ(1,3), να δείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αμβλεία.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,2), Β(2, 2 + $\sqrt{3}$), Γ(-2$\sqrt{3}$, 8-$\sqrt{3}$). Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}M$.

21. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,2)$ και $\vec{\beta}=(2,\lambda)$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R$, ώστε:

    α) $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ γ) $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$.

22. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3,4)$ και έχουν μέτρο 2.

23. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-1,2)$.

    α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε: $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{v}|=5$.

    β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ ώστε: $\vec{u} \,//\, \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=\sqrt{45}$.

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-4,3)$, $\vec{\beta}=(5,12)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ τέτοιο ώστε: $|\vec{u}|=\sqrt{37}$ και $\vec{u} \perp 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$, $\vec{\beta}=(3,4)$. Να βρείτε διανύσματα $\vec{u}, \vec{w}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις: $\vec{u}=\vec{\beta}+2\vec{w}$, $\vec{u} \,//\, \vec{\alpha}$ και $\vec{w} \perp \vec{\beta}$.

26. Αν $\vec{\alpha}=(5,2)$ και $\vec{\beta}=(7,-3)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=38$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{x}=30$.

27. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}|=2\sqrt{2}$ που διχοτομεί την κυρτή γωνία των ημιευθειών ΟΑ και ΟΒ, που ορίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}=(3,2)$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}=(-2,-3)$.

θεωρητικές

28. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|\neq 0$, να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{3}\,|\vec{\alpha}|$.

29. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=1$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=5$, να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

30. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, να δείξετε ότι:

    α) συν$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2}{2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$ β) Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, τότε είναι : συν$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$.

31. Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

α) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ β) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

32. α) Να εξεταστεί πότε ισχύει ο νόμος της διαγραφής στο εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή πότε για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ από τη σχέση: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, έπεται ότι: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.
β) Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ μη μηδενικά διανύσματα του ίδιου επιπέδου, με $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μη παράλληλα και ισχύουν: $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\alpha}\cdot\vec{y}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{x}=\vec{\beta}\cdot\vec{y}$, τότε είναι: $\vec{x}=\vec{y}$.

33. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=4$ και $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η $\overrightarrow{AB}$ με τη διάμεσο $\overrightarrow{AM}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

34. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$. Να αποδειχτεί η καθετότητα των παρακάτω διανυσμάτων:
α) Το $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}$ με το $\vec{\beta}$,
β) Το $\vec{\alpha}-\dfrac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}$ με το $\vec{\beta}$,
γ) Το $|\vec{\alpha}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ με το $|\vec{\alpha}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$.

35. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ του επιπέδου ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2$,να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. Εξετάστε τι συμβαίνει αν: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=-2$.

36. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου. Αν $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και για κάθε κ, λ∈R τα διανύσματα $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}-2\kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{w}=4\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

37. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=5$, $|\vec{\gamma}|=8$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta}=50$, να δείξετε ότι: $\vec{\gamma}=-4\vec{\alpha}$.

38. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=1$. Αν υπάρχει x∈R τέτοιο ώστε να ισχύει: $|x\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+2x\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

προβολές

39. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι: $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$, να δείξετε ότι:

$προβ_{\vec{α}}(\vec{β}) = \frac{3}{8}\vec{α}$.

40. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$=(5,2), $\vec{β}$=(-2,2). Υπολογίστε:
$προβ_{\vec{β}}(\vec{α})$, $προβ_{\vec{α}}(\vec{β})$, $προβ_{\vec{α}}(\vec{α}-\vec{β})$.

41. Αν ισχύουν οι σχέσεις: $|\vec{α}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{β}|=1$ και $προβ_{\vec{β}}(\vec{α}) = -2\vec{β}$, να βρεθεί η $προβ_{\vec{α}}(\vec{β})$.

42. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ ώστε να ισχύει: $προβ_{\vec{α}}(\vec{α}+\vec{β}) = 2\vec{α}$.
Να δείξετε ότι: α) $\vec{α}\cdot\vec{β}=|\vec{α}|^2$ β) $|\vec{β}| \geq |\vec{α}|$.

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Αν 2(ΑΒ)=(ΑΓ)=2 και $\hat{A}=60^0$, να υπολογίσετε την προβολή του $\overrightarrow{AM}$ στο $\overrightarrow{AΓ}$.

44. Αν για τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ ισχύουν: $προβ_{\vec{α}}(\vec{β}) = \frac{1}{4}\vec{α}$ και $προβ_{\vec{β}}(\vec{α}) = 2\vec{β}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

45. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$=(-1,2), $\vec{β}$=(3,-1) και $\vec{u}$=(2,4).
α) Να βρείτε την $προβ_{\vec{α}}(\vec{β})$.
β) Να αναλυθεί το $\vec{u}$ σε δύο μη μηδενικές κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία έχει τη διεύθυνση του $\vec{α}$.

46. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{α}$=(2,3) σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{u}, \vec{w}$ ώστε: $\vec{w} \,//\, \vec{β}$=(3,-1).

47. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{w}$ τέτοια ώστε: $\vec{α}=\vec{u}-\vec{w}$, $\vec{w} \perp \vec{α}$ και $\vec{u} \,//\, \vec{β}$.

48. Αν $\vec{α}$=(-2,-1), $\vec{β}$=(1,3), να βρεθούν δύο διανύσματα $\vec{γ}, \vec{δ}$ τέτοια ώστε: $\vec{α}=\vec{γ}+\vec{δ}$, $\vec{δ} \,//\, \vec{β}$ και $\vec{α} \perp \vec{γ}$.

49. Αν για τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι: $|\vec{α}|=1$, $|\vec{β}|=4$ και $(\vec{α},\vec{β})=\frac{π}{3}$, να βρεθεί διάνυσμα $\vec{γ}$ τέτοιο ώστε: $\vec{γ} \,//\, \vec{α}-\vec{β}$ και $\vec{α} \perp \vec{β}-\vec{γ}$.

50. Έστω: $\vec{\alpha}=(2,1)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(3,5)$. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}+2\vec{x}=\vec{\gamma}$.

51. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 1$, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}$.

52. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{x}$ ικανοποιούν τη σχέση: $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$,
α) να δείξετε ότι: $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.
β) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 1$, να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

53. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-1$, να δείξετε ότι δύο απ' αυτά είναι αντίθετα.

54. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $E=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\right)^2-\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2}$. Κατόπιν, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ, τέτοιος ώστε να ισχύει $|\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=1$, να δείξετε ότι: $E\leq\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|$.

55. Αν για τα μοναδιαία μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $(\vec{\alpha},\vec{\alpha}+\vec{\beta})=45^0$, να δείξετε ότι: $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=90^0$.

56. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\vec{\gamma}=x\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $x\in R$, να βρεθεί η τιμή του x ώστε το $|\vec{\gamma}|$ να γίνεται ελάχιστο. Για την τιμή αυτή, να δείξετε ότι: $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$.

57. α) Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2=0$, να βρεθούν οι $x,y\in R$ για τους οποίους τα μέτρα των $\vec{u}=\vec{\alpha}+x\vec{\beta}$ και $\vec{v}=y\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ γίνονται ελάχιστα.
β) Για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί η γωνία $(\vec{u},\vec{v})$.
γ) Κατόπιν να αποδειχτεί ότι: $\vec{\alpha}\perp\left(\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\right)\vec{\gamma}+16\vec{\beta}\right)$.

58. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=(0,-4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,0)$. Να υπολογιστούν τα μήκη της διαμέσου $\overrightarrow{AM}$, του ύψους $\overrightarrow{A\Delta}$ και της διχοτόμου $\overrightarrow{AE}$.

59. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, $|\vec{\gamma}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{3}$. Αν $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$, να αναλυθεί το $\vec{\gamma}$ σε δύο μη μηδενικές συνιστώσες παράλληλες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

60. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $0 < (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) < \frac{\pi}{2}$. Δίνονται ακόμη τα διανύσματα $\vec{p} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $\vec{q} = 5\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{u}$ με $|\vec{u}| = 3$ και $(\vec{u}, \vec{\alpha}) = 60^0$. Αν $\vec{p} \perp \vec{q}$, να αναλυθεί το $\vec{u}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

61. α) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του επιπέδου, να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
Πότε ισχύει η ισότητα;
β) i) Αν $x^2+y^2=25$, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης: $A=5x-12y$.
ii) Αν για τα σημεία $M(x,y)$ ισχύει ότι $4x^2+9y^2=25$, να βρεθούν η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\Pi=8x-9y$ καθώς και τα σημεία M που αυτές επιτυγχάνονται.

γεωμετρικά θέματα

62. Έστω Α, Β σημεία του επιπέδου με $|\overrightarrow{AB}| = 4$. Αν Μ σημείο του επιπέδου με $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{AB}$.

63. Αν ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{B\Gamma}^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

64. Να δειχτεί ότι η διάμεσος και η διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος.

65. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{\Delta B} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

66. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος του, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{A\Gamma}^2 = 2\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$.

67. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($A=90^0$). Να δείξετε ότι:
i) $\overrightarrow{B\Gamma}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2$ ii) $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ iii) $\overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

68. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $A=B=90^0$ στο οποίο ισχύει: $|\overrightarrow{B\Gamma}| \cdot |\overrightarrow{A\Delta}| = \left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|^2$. Αν Μ το μέσο της ΑΒ, να δείξετε ότι: $\Gamma M\Delta = 90^0$.

69. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $\Gamma E \perp AB$, $\Gamma Z \perp B\Delta$. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{B\Gamma}^2$.

70. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2ΑΔ και έστω σημείο Μ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{\Delta M} = 3\overrightarrow{M\Gamma}$. Αν είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$:

α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι: $A\Gamma \perp BM$.

71. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) με (ΑΒ)=1 και (ΑΓ)=2. Θεωρούμε σημείο Κ της ΒΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{B\Gamma}$.

α) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, αν $\left|\overrightarrow{AK}\right| = \dfrac{\sqrt{20}}{5}$.

β) Για την παραπάνω τιμή του λ, να δείξετε ότι το ΑΚ είναι ύψος του ΑΒΓ.

72. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A=60^0$ και $B=45^0$. Αν Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου:

α) να βρείτε τα γινόμενα: $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

β) να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

γεωμετρικοί τόποι

73. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Να δείξετε ότι τα σημεία Μ του επιπέδου του τριγώνου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ βρίσκονται σε ευθεία $\chi'A\chi$ // ΒΓ.

74. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5$.

75. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε: $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB}\right) = 5$.

76. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και το διάνυσμα $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}$ όπου Μ σημείο του επιπέδου του τριγώνου. Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Μ στις παρακάτω περιπτώσεις: α) $\vec{u}$ // ΒΓ β) $\left|\vec{u}\right| = 4$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

 i) Αν $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$, τότε: $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$.

 ii) Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε το $-\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ έχει μέτρο -1.

 iii) Αν $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{B\Gamma}|$,τότε $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$.

 iv)Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $(\lambda\vec{\alpha}) \perp \vec{\beta}$, $\lambda \in R$.

 v) Είναι $(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}) = \frac{\pi}{4}$.

 vi) Αν $\vec{\alpha}$ =(x, y), $\vec{\beta}$ = (-y,x), τότε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$=90^0.

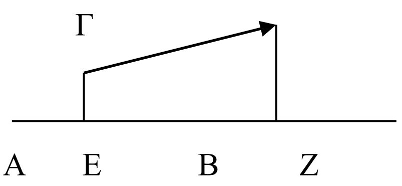
 vii) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε: $\frac{\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

 viii) Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ η ισότητα $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\alpha}$ ισχύει μόνον όταν είναι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\gamma}$.

 ix) Αν $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{4}$, τότε είναι $\vec{\alpha}$ =(4,3).

 x) Αν det $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ =0, τότε είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$<0.

 xi) Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος, ισχύει: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EZ}$.

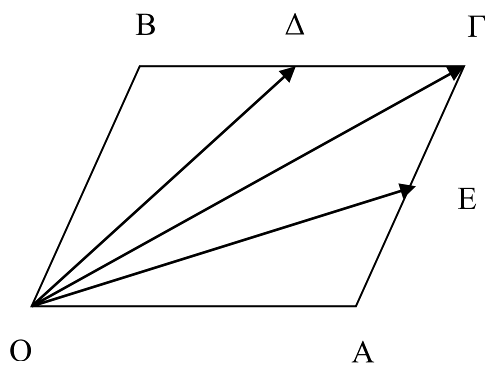


 xii) Η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι αμβλεία αν και μόνον αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$<0.

 xiii) Τα διανύσματα $\vec{u}$ = (α, β) και $\vec{v}$ = (γ, δ) είναι κάθετα αν και μόνον αν τα διανύσματα $\vec{x}$ =(-α, δ) και $\vec{y}$ =(γ, -β) είναι κάθετα.

 xiv) Τα αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

2. Στο διπλανό παραλληλόγραμμο τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσης ως προς το Ο $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ. ‘Εστω $\vec{\gamma}, \vec{\delta}, \vec{\varepsilon}$ τα διανύσματα θέσης των Γ, Δ, Ε αντίστοιχα.



 i) Να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το $\vec{\delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}$.

ii) Να δείξετε ότι: $4\left(\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}\right)=3\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$.

3. Αν $\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α με τις τιμές του κ στη στήλη Β.

	ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
1)	$\lvert\vec{\alpha}\rvert>\lvert\vec{\beta}\rvert$	α)	κ=1
2)	$\lvert\vec{\alpha}\rvert=\lvert\vec{\beta}\rvert$	β)	κ= -1
3)	$\lvert\vec{\alpha}\rvert<\lvert\vec{\beta}\rvert$	γ)	κ < -1 ή κ > 1
		δ)	-1 < κ < 1
		ε)	κ= -1 ή κ= 1

4. Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς 4 και κέντρου Ο. Να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α με τις αντίστοιχες τιμές τους στη στήλη Β.

	ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
i)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$	α)	0
ii)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$	β)	16
iii)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	γ)	-8
iv)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O\Delta}$	δ)	-16
v)	$\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$	ε)	8
vi)	$\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{O\Delta}$	ζ)	4
vii)	$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$	η)	-4

5. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2ΑΔ και έστω σημείο Μ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{\Delta M}=3\overrightarrow{M\Gamma}$. Αν είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$:
α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.
β) Να δείξετε ότι: $A\Gamma\perp BM$.

6. Στο καρτεσιανό επίπεδο Οχψ δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5), Γ(3,4) και έστω Η(x,y) σημείο του επιπέδου. Αν $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$, να βρείτε τα x,y.

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ έχει μήκος α. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$.

8. Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιο (ΑΒ// ΔΓ) με (ΑΒ)=5 και (ΔΓ)=7. Έστω σημείο Μ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$, λ∈R. Να βρεθεί ο λ, ώστε το Μ να είναι το συμμετρικό του Γ ως προς το Δ.

9. Το σημείο Ο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και έστω: $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$. Αν Δ, Ε, Ζ τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ:
α) να συμπληρώσετε τις ισότητες:
$\vec{\beta}^2-\vec{\gamma}^2=$……….. $\vec{\gamma}^2-\vec{\alpha}^2=$…………… $\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=$…………..

β) Με τη βοήθεια της απάντησης στο προηγούμενο ερώτημα, να δείξετε ότι:
$ΟΔ \perp ΒΓ$, $ΟΕ \perp ΓΑ$ και $ΟΖ \perp ΑΒ$.

10. Δίνεται ότι: $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \lambda\vec{\gamma}$, όπου τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, $\lambda>0$ και $|\vec{\gamma}|=1$.

α) Να δείξετε ότι: $\lambda=\sqrt{\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2}$.

β) Αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\varphi$, τότε: $συν\varphi=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{\lambda}$.

11. Αν $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \neq \vec{0}$ και $|\vec{z}|\vec{x}\vec{y} + |\vec{x}|\vec{y}\vec{z} = 2|\vec{x}||\vec{y}||\vec{z}|$, να δείξετε ότι: $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \dfrac{\vec{y}}{|\vec{y}|} = \dfrac{\vec{z}}{|\vec{z}|}$.

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) με (ΑΒ)=1 και (ΑΓ)=2. Θεωρούμε σημείο Κ της ΒΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{ΒΚ} = \lambda\overrightarrow{ΒΓ}$.

α) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, αν $|\overrightarrow{ΑΚ}| = \dfrac{\sqrt{20}}{5}$.

β) Για την παραπάνω τιμή του λ, να δείξετε ότι το ΑΚ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

13. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=1$. Αν υπάρχει $x \in R$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $|x\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + 2x\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

14. Αν ΑΔ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει η ισότητα:
$(\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΓ})\overrightarrow{ΑΓ} = (\overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΒΓ})\overrightarrow{ΑΒ}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

15. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=5$, $|\vec{\gamma}|=8$ και $(\vec{\alpha} - \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta}=50$, να δείξετε ότι: $\vec{\gamma} = -4\vec{\alpha}$.

16. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}|=2\sqrt{2}$ που διχοτομεί την κυρτή γωνία των ημιευθειών ΟΑ και ΟΒ, που ορίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{\alpha} = (3,2)$ και $\overrightarrow{ΟΒ} = \vec{\beta} = (-2,-3)$.

17. Δίνεται το τρίγωνο ΟΑΒ με $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΟΒ} = \vec{\beta}$. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| =1$ και $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$, τότε:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ.

β) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ για το οποίο ισχύουν: $|\vec{\gamma}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{6}$, σε δύο συνιστώσες παράλληλες προς τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{\Gamma A} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = \vec{y}$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΕ και ΒΓΖΗ. Αν $\overrightarrow{\Gamma \Delta} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = \vec{x}$, να δείξετε ότι:
α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{y} + \vec{\beta} \cdot \vec{x} = 0$.
β) $\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = 0$.
γ) Η διάμεσος ΓΝ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετη στη ΖΔ.