ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχτεί ότι η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με την εξωτερική του γωνία.

2. Κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα ρ=12 και έχει απόστημα $6\sqrt{3}$.Να βρεθεί η πλευρά του πολυγώνου.

3. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ.
   i) Να δειχτεί ότι η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ.
   ii) Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ να δειχτεί ότι το Κ είναι η χρυσή τομή της διαγωνίου ΑΓ.

4. Αν Α,Β,Γ,Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, να δειχτεί ότι: $ΑΓ^2=ΑΒ^2 + ΑΒ.ΑΔ$.

5. Αν $E_α$, $E_β$ και $E_γ$ είναι τα εμβαδά κανονικών ν-γώνων, που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β και γ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ($Α=90^0$), να δειχτεί ότι:
   $E_β + E_γ = E_α$

6. Να αποδειχτούν οι τύποι:

   i) $α_ν=\frac{2R^2-λ_{2ν}^2}{2R}$ ii) $λ_ν=\frac{λ_{2ν}\sqrt{4R^2-λ_{2ν}^2}}{R}$

7. Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, να δειχτεί ότι: ΑΓ=3ΚΓ.

8. Υπάρχει κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R του οποίου η κεντρική γωνία είναι 16^0; Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι 8 ορθές και το εμβαδό του $24\sqrt{3}$. Να βρεθεί η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

2. Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε τα τόξα $ΑΒ=60^0$, $ΒΓ=120^0$ και $ΓΔ=120^0$. Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Η, να βρεθούν οι πλευρές του ΑΒΓΔ και τα τμήματα ΒΗ, ΑΗ, ΓΗ συναρτήσει της ακτίνας R.

3. Να βρεθεί η πλευρά κανονικού εξαγώνου περιγεγραμμένου περί κύκλο που έχει ακτίνα R.

4. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών δύο ισοπλεύρων τριγώνων που το ένα εγγράφεται και το άλλο περιγράφεται στον ίδιο κύκλο (O,R).

5. Να βρεθεί το εμβαδό ενός κανονικού δωδεκαγώνου από την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου, χωρίς να βρεθεί η πλευρά του.

6. Να βρεθεί το εμβαδό: i) ισοπλεύρου τριγώνου ii) κανονικού εξαγώνου, περιγεγραμμένου περί κύκλο (O,R) από την ακτίνα R.

7. Σε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ενώνουμε την κορυφή Α με το μέσο Μ της πλευράς ΓΔ. Να βρεθεί το εμβαδό καθενός από τα δύο μέρη που διαιρείται το εξάγωνο.

8. Σε κύκλο (O,R) φέρνουμε δύο παράλληλες χορδές, ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου και του κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο αυτό. Να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου που έχει βάσεις τις χορδές αυτές.

9. Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=λ_4$ και $ΑΓ=λ_3$. Να βρεθούν οι γωνίες και το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

10. Να δειχτεί ότι οι διαγώνιοι κανονικού εξαγώνου που δεν διέρχονται από το κέντρο του, τεμνόμενοι σχηματίζουν κανονικό εξάγωνο. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο εξαγώνων.

11. Σε κύκλο (O, R) εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο, μέσα στο τρίγωνο κύκλο και μέσα στον κύκλο τετράγωνο. Να υπολογιστεί η πλευρά του τετραγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

12. Σε κύκλο (O,R) εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ και Ν το μέσο της πλευράς ΒΓ, να υπολογιστεί το τμήμα ΜΝ συναρτήσει της ακτίνας R.

13. Σε τυχαίο σημείο Α κύκλου (O,R) φέρνουμε εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ=2R.Αν η διχοτόμος της γωνίας ΑΟΒ τέμνει την ΑΒ στο Κ, να δειχτεί ότι η ΑΚ είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R).

14. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και Η το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν η ΑΗ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Θ, να δειχτεί ότι: $ΗΘ = \frac{R\sqrt{10}}{10}$.

15. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Με κέντρο τις κορυφές του και ακτίνα ΟΑ γράφουμε κυκλικά τόξα που τέμνουν τις πλευρές του σε οκτώ σημεία. Να δειχτεί ότι τα σημεία αυτά αποτελούν κορυφές κανονικού οκταγώνου του οποίου να υπολογίσετε το εμβαδό από την πλευρά α του τετραγώνου.

16. Οι προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΓΔ κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) τέμνονται σε σημείο Σ. Να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ΣΑΔ από την ακτίνα R.

17. Να δειχτεί ότι το εμβαδό κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι μέσο ανάλογο των εμβαδών του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου.

18. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R), παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΒΚ=ΓΛ=ΑΝ=λ_3, όπου λ_3 η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R). Να δειχτεί ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο και να υπολογιστεί η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

19. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), Ζ το μέσο του τόξου ΑΓ και Η το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν η ΖΗ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Θ, να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων ΖΗ και ΗΘ συναρτήσει της ακτίνας R.

20. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε τα τόξα ΑΒ=60^0, ΒΓ=90^0, ΓΔ=120^0. Να δειχτεί ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και να βρεθούν οι πλευρές και οι διαγώνιοί του.

21. Κανονικού πολυγώνου η ακτίνα R είναι 8cm και το απόστημα του α είναι $4\sqrt{3}$cm . Να υπολογίσετε :
    α) Η πλευρά του λ .
    β) Η κεντρική του γωνία ω σε μοίρες .
    γ) Το πλήθος ν των πλευρών του .

<u>ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ</u>

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Κύκλος ακτίνας R=5 ανοίγεται και σχηματίζει κυκλικό τόξο κεντρικής γωνίας 36^0. Να βρεθεί η ακτίνα του κυκλικού τόξου.

2. Κυκλικό τόξο ακτίνας ρ=24 και κεντρικής γωνίας μ=300^0 κλείνεται και σχηματίζει κύκλο. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου.

3. Πάνω σε μια ευθεία χψ παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ. Ν δειχτεί ότι το άθροισμα των μηκών των τριών ημικυκλίων, που γράφονται με διαμέτρους τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ είναι ίσο με το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΔ.

4. Δίνεται κύκλος (O,R). Με διάμετρο μία ακτίνα του ΟΑ γράφουμε κύκλο κέντρου Κ. Από το Ο φέρνουμε μία ημιευθεία, που να συναντά τον κύκλο (O) στο Β και τον κύκλο (Κ) στο Γ. Να δειχτεί ότι το τόξο ΑΒ έχει το ίδιο μήκος με το τόξο ΑΓ.

5. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Ι το κέντρο του εγγεγραμμένου του κύκλου. Αν I_1, I_2, I_3 είναι τα κέντρα των κύκλων που είναι εγγεγραμμένοι στις γωνίες Α, Β, Γ και εφάπτονται στον κύκλο Ι, να δειχτεί ότι το μήκος του κύκλου Ι ισούται με το άθροισμα των μηκών των κύκλων I_1, I_2 ,I_3.

6. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=2R. Με διαμέτρους τις ΑΟ και ΟΒ γράφουμε ημικύκλια μέσα στο πρώτο. Εγγράφουμε κύκλο που να εφάπτεται και στα τρία ημικύκλια. Να βρεθεί το μήκος και το εμβαδό του εγγεγραμμένου κύκλου.

7. Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά λ_3=6. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του κύκλου και του τριγώνου.

8. Σε κύκλο (O,R) εγγράφουμε τετράγωνο και σ' αυτό άλλο κύκλο. Να βρεθεί το μήκος και το εμβαδό του νέου κύκλου.

9. Να βρεθεί το εμβαδό του καθενός από τα δύο μέρη στα οποία διαιρείται κύκλος (O,R) από την πλευρά: i) ισοπλεύρου τριγώνου και ii) τετραγώνου, εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτόν.

10. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 2α. Με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα α γράφουμε τεταρτοκύκλια μέσα σ' αυτό. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σταυρού που σχηματίζεται.

11. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,ρ), (Λ.ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους, να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

12. Να βρεθεί το εμβαδό ενός κύκλου, αν η διαφορά μεταξύ του εμβαδού του κύκλου και του εμβαδού του ισοπλεύρου τριγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτόν είναι $4\pi-3\sqrt{3}$.

13. Να βρεθεί το εμβαδό ενός κύκλου, αν η διαφορά μεταξύ του εμβαδού του εγγεγραμμένου τετραγώνου και του εμβαδού του περιγεγραμμένου τετραγώνου είναι 10.

14. Δύο κύκλοι (K,R), (Λ,2R) εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Αν ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους, να βρεθεί το εμβαδό του κύκλου που γράφεται με διάμετρο την ΑΒ.

15. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) με ΒΓ=16. Με κέντρο το Α και ακτίνα το μισό του ύψους ΑΚ γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδό του μέρους του κύκλου, που είναι εκτός του τριγώνου.

16. Δίνεται κύκλος (O,R). Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ παίρνουμε τμήμα ΑΓ=ΟΑ και από το Γ φέρνουμε την εφαπτομένη ΓΒ. Να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΑΒ.

17. Δύο κύκλοι (Κ,3ρ) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους, να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

18. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Με κέντρα τις κορυφές Α και Γ γράφουμε τόξα κύκλων ακτίνας α μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από τα δύο αυτά τόξα.

19. Δίνεται τετράγωνο πλευράς 2α. Με διαμέτρους τις πλευρές του γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σταυρού που σχηματίζεται

20. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και εγγεγραμμένο σ'αυτόν ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με κέντρα τις κορυφές του ΑΒΓ γράφουμε τρία μικρά τόξα που έχουν τα άκρα τους πάνω στον κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τρίφυλλου που σχηματίζεται.

21. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με διαμέτρους τις ΑΒ και ΒΓ γράφουμε δύο ημικύκλια εντός του τετραγώνου. Να βρεθεί το εμβαδό του κοινού μέρους των δύο ημικυκλίων.

22. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) έχουν διάκεντρο $ΚΛ=R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδό του κοινού μέρους τους. (Όμοια, αν: $ΚΛ=R\sqrt{3}$).

23. Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν γράψουμε το τόξο ΒΓ του κύκλου (Α,ΑΒ), το οποίο περιέχεται στον κυκλικό δίσκο (Ο,R), να δειχτεί ότι το εμβαδό του σχηματιζόμενου μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

24. Με κέντρα τις κορυφές κανονικού εξαγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) και ακτίνα R γράφουμε μέσα σ΄αυτό τόξα. Να βρεθεί το εμβαδό του σχηματιζόμενου εξάφυλλου.

25. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ ακτίνας R. Αν Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου (Α,R) με το τεταρτοκύκλιο, να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου σχήματος ΟΒΓ.

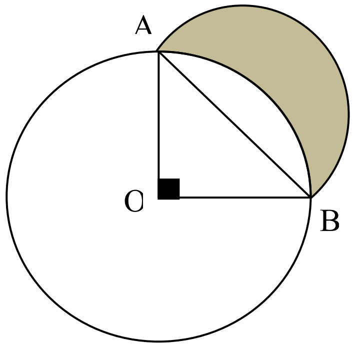
26. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τόξο $ΑΒ=60^0$. Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη Αχ και την $ΒΓ\perp Αχ$. Να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

27. Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $ΑΒ=90^0$ και $ΒΓ=30^0$. Να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

28. Να βρεθεί το εμβαδό κύκλου, που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας 120^0.

29. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ ακτίνας α. Με διαμέτρους τις ΟΑ και ΟΒ γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τεταρτοκύκλιο, που τέμνονται στο Μ. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ.

30. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε δύο κάθετες ακτίνες του OA και OB. Με διάμετρο την AB γράφουμε εκτός του κύκλου ημικύκλιο. Να υπολογιστούν :
α) Το εμβαδόν του τριγώνου AOB .
β) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου OAB .



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Δύο κανονικά οκτάγωνα είναι όμοια .

2. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια .

3. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι κανονικό .

4. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες είναι κανονικό .

5. Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές.

6. Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία είναι ίσες .

7. Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα έχουν ίσα εμβαδά .

8. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας του .

9. Ο λόγος των μηκών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους .

10. Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους .

11. Αν φ_ν είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου, τότε

$$\varphi_\nu = 360^0 - \frac{180^0}{\nu} .$$

12. Ακτίνα ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του εγγεγραμμένου κύ – κλου του .

13. Η πλευρά ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου .

14. Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια .

15. Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου έχουν ίσα εμβαδά .

16. Το απόστημα ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με την πλευρά του εξαγώνου .

17. Το απόστημα ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου .

18. Σε δύο όμοια κανονικά πολύγωνα, ο λόγος ομοιότητας τους ισούται με το τετρά – γωνο του λόγου των ακτίνων τους .

19. Το μήκος κύκλου ακτίνας 1 είναι π .

20. Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, εί – ναι $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, τότε η πλευρά του είναι R.

21. Εάν το απόστημα κανονικού πολυγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, εί – ναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, τότε η πλευρά του είναι R.

22. Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι αμβλεία, είναι ισόπλευ – ρο τρίγωνο .

23. Αν Pν η περίμετρος ενός κανονικού ν-γώνου, τότε το εμβαδόν του $E_ν$ είναι $Pν \cdot α_ν$.

24. Η πλευρά $λ_6$ κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι R.

25. Η πλευρά $λ_3$ ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι $\frac{R}{2}$.

26. Το κανονικό πολύγωνο του οποίου η πλευρά $λ_ν$ ισούται με την ακτίνα R του πε – ριγεγραμμένου κύκλου τετράγωνο .

27. Το κανονικό πολύγωνο του οποίου το απόστημα $α_ν$ ισούται με το μισό της πλευ – ράς $λ_ν$ είναι εξάγωνο .