1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=12cm, ΑΓ=28cm και ΒΓ= 20cm.

α) Να δείξετε ότι η γωνία Β είναι αμβλεία και να βρεθεί η προβολή της ΑΒ στην ΒΓ.

β) Να βρεθεί η γωνία Β .

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΑΔ , ΒΕ και το ορθόκεντρο του Η.

α) Να δείξετε ότι $ΑΗ \cdot ΑΔ = ΑΕ \cdot ΑΓ$.

β) Αν $ΑΗ \cdot ΑΔ = \frac{α^2}{2}$, να δείξετε ότι :

i) $β^2 + γ^2 = 2α^2$.

ii) $μ_α = \frac{α\sqrt{3}}{2}$.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι : $3β^2 + 2γ^2 = 2α^2$.

α) Να δείξετε ότι $μ_α^2 = \frac{α^2 - β^2}{4}$.

β) Να δείξετε ότι $\widehat{Α} > 90^0$.

γ) Αν ΜΔ είναι η προβολή της διαμέσου ΜΒ στην πλευρά β, να δείξετε ότι $ΜΔ = \frac{3β}{4}$.

4. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $μ_α = μ_β\sqrt{2}$,να δείξετε ότι $4β^2 = 5α^2 + 2γ^2$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} < 90^0$). Αν ΑΜ διάμεσος και ΒΕ το ύψος του να δείξετε ότι $ΜΑ^2 = ΜΒ^2 + ΑΕ \cdot ΑΓ$.

6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $μ_β^2 + μ_γ^2 = 5μ_α^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο .

7. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και η διάμετρος του ΑΒ. Έστω Γ,Δ τα μέσα των ΟΑ,ΟΒ αντίστοιχα και ΕΗ τυχαία χορδή του κύκλου που περνά από το σημείο Γ. Να δείξετε ότι :

α) $ΓΕ \cdot ΓΗ = \frac{3R^2}{4}$ β) $ΕΓ^2 + ΕΔ^2 = \frac{5R^2}{2}$

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ_α. Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \dfrac{\alpha^2}{2}$, να δείξετε ότι :

α) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ β) Να υπολογίσετε την γωνία Α .

9. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}$.Να δείξετε ότι :

α) $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$.

β) Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε : $ΑΗ\cdot\upsilon_\alpha = \alpha^2$.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^0$) με ΑΒ = $6\sqrt{2}$ cm και και ΑΓ = 3cm. Αν ΑΔ⊥ΒΓ και ΔΕ⊥ΑΓ, τότε :

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ .

β) Να δείξετε ότι ΔΒ·ΔΓ = ΑΓ·ΑΕ .

11. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και φέρνουμε από το Β την εφαπτομένη ε. Αν η προέκταση της χορδής ΑΔ τέμνει την ε στο σημείο Ε, να δείξετε ότι $ΑΔ\cdot ΑΕ = 4\rho^2$, όπου ρ η ακτίνα του ημικυκλίου .

12. Σε κύκλο (Κ,ρ) φέρνουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ και από το μέσο Ε της ΚΒ φέρνουμε την ΕΖ⊥ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο Ζ. Να δείξετε ότι $ΕΓ^2 + ΕΖ^2 = 2\rho^2$.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) με πλευρές α,β και $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}$. Να υπολογιστεί :

α) Η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου.

β) Η πλευρά γ συναρτήσει του R .

γ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΑΒ .

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1cm και ΒΓ = $\sqrt{3}$cm.

Να υπολογίσετε : α) την γωνία Α .

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

γ) την διάμεσο ΒΜ = μ_β .

15. Δίνεται κύκλος (Κ, ρ) και φέρνουμε την διάμετρο ΑΒ και τυχαία χορδή ΑΓ. Αν από το μέσο της ΑΚ φέρουμε την ΜΔ⊥ΑΚ, που τέμνει την ΑΓ στο Δ, να δείξετε ότι $ΑΓ \cdot ΑΔ = ρ^2$.

16. Δίνεται κύκλος (Κ, ρ) με ακτίνα ρ =14cm και σημείο Μ που απέχει από το Κ απόσταση 18 cm. Αν από το Μ φέρουμε την τέμνουσα ΜΑΒ, να βρεθεί το μήκος του ΜΒ, όταν ΑΒ = 12cm .

17. Σημείο Δ χορδής ΑΒ κύκλου ακτίνας R =13cm απέχει από το κέντρο Κ απόσταση 11cm.Αν ΔΒ=3ΑΔ, να υπολογιστεί το μήκος της χορδής ΑΒ.

18. Έστω ΑΒ, ΓΔ χορδές κύκλου (Ο, R = 15cm) οι οποίες τέμνονται στο Σ. Αν ΑΣ = 3cm, ΣΔ = 6cm και η δύναμη του Σ είναι –12, να υπολογίσετε το μήκος των χορδών, καθώς και την απόσταση ΟΣ .

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ τέτοιες ώστε να ισχύει $β^2+γ^2=3α^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε : α) να εκφράσετε την διάμεσο ΑΜ συναρτήσει της πλευράς α.

β) Να δείξετε ότι $ΑΜ \cdot ΑΕ = \frac{3α^2}{2}$.

20. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει α = 2γ και $β = \sqrt{7}γ$.

α) Να δείξετε ότι $μ_α = \frac{α\sqrt{3}}{2}$.

β) Να βρείτε το είδος της γωνίας Β .

γ) Αν ΑΕ⊥ΒΓ, να υπολογίσετε το ΒΕ συναρτήσει του γ .

δ) Να βρείτε τη γωνία Β .

21. Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε εγγεγραμμένο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $ΑΒ = R\sqrt{2}$ και ΒΓ = ΑΔ = R . Στο σημείο Β φέρνουμε εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την ΔΑ στο Κ. Να βρείτε :

α) Τα μήκη των τμημάτων ΚΑ, ΚΒ συναρτήσει της ακτίνας R .

β) Η δύναμη του σημείου Κ ως προς τον κύκλο (Ο, R) .

γ) Τα εμβαδά των ΑΒΓΔ και ΒΓΔΚ συναρτήσει της ακτίνας R .

22. Έστω οι κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ με μήκη $R\sqrt{3}$ και $R\sqrt{2}$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Σ. Να βρείτε την δύναμη του σημείου Σ .

23. Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια ώστε η γωνία $\Gamma\widehat{B}x$ να είναι 30^0 . Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α.Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει την Βx στο σημείο Ρ . Να αποδείξετε ότι :

α) ΑΓ = R β) $\dfrac{(\text{ΡΒΓ})}{(\text{ΡΑΓ})} = 4$ γ) $\text{ΡΓ} = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

24. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και το σημείο Ν της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΝ > ΒΝ. Αν ΑΓ= R , $\Delta^{N}_{(O,\,R)} = -3$, $(\text{ΑΒΓ}) = 6\sqrt{3}\ cm^2$ και ΟΚ ⊥ ΑΓ να υπολογίσετε:

α) Την πλευρά ΑΒ συναρτήσει του R .
β) Την ακτίνα R του κύκλου .
γ) Τα τμήματα ΟΝ και ΟΚ .
δ) Τα τμήματα ΝΑ και ΝΒ .
ε) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΝΟ .

25. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) και το ύψος του ΑΔ. Αν $\text{ΑΒ} = 2\sqrt{3}$cm και ΑΓ = 2cm τότε :

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ και ΔΓ .
β) Να βρείτε το εμβαδόν των κυκλικών τομέων με κέντρα Β, Γ και ακτίνες ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα .
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τετραπλεύρου που σχηματίζεται από το τρίγωνο και τους παραπάνω κυκλικούς τομείς .

26. Δίνεται κύκλος (Λ, R) και δύο χορδές του ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται κάθετα εκτός κύκλου στο Ο. Αν ΟΑ = 16cm, ΒΓ = 18cm και ΓΕ = 6cm με το Ε να βρίσκεται στην προέκταση της ΒΓ, τότε :

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΟΔ .
β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, καθώς και την ακτίνα του κύκλου (Λ, R) .
γ) Να βρείτε την απόσταση του Ε από την ΛΓ .

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Δ, να δείξετε ότι :

α) $ΜΔ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ β) (ΑΒΓ) = 3(ΒΔΓ)

28. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή $ΑΒ = \lambda_6$. Αν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α, Β τέμνονται στο Γ να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ .

29. Σε κύκλο (Κ, R) θεωρούμε διαδοχικές χορδές ΑΒ = R, $ΒΓ = R\sqrt{2}$ και $ΓΔ = R\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τόξων ΑΓ και ΔΑ .

30. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ = 2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου. Η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο Δ.

α) Να δείξετε ότι $ΓΕ = 2\sqrt{2}R$.

β) Να δείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ = ΓΔ·ΓΕ .

γ) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R .

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R .

31. Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Γ, Β έτσι ώστε $ΑΓ = \lambda_{12}$ και $ΑΒ = \lambda_3$. Να δείξετε ότι :

α) $ΒΓ = R\sqrt{2}$. β) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΒΓ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ .

32. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Α με ΟΑ = 2R . Αν ΑΒ, ΑΓ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο, να βρεθεί το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ . (ΒΓ το μικρότερο τόξο)

33. Τρείς κύκλοι (O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3) με $R_1=\sqrt{3}-1$cm, $R_2=\sqrt{3}+1$cm και $R_3 = 3-\sqrt{3}$ cm εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α,Β,Γ .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.