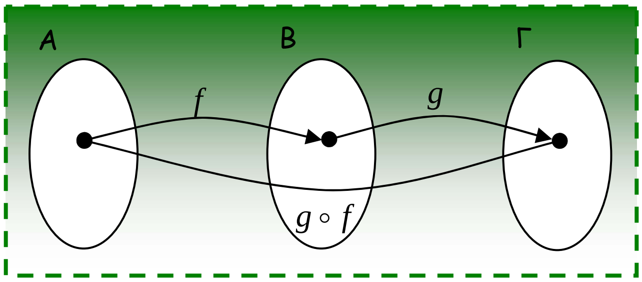
Σύνθεση συναρτήσεων

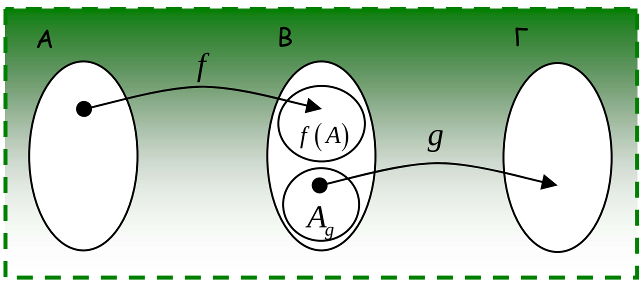
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to \Gamma$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f: A \to \Gamma$ με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ και ονομάζεται σύνθεση της f με την g.



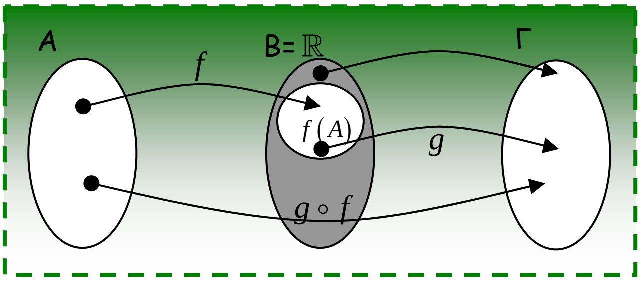
Παρατηρήσεις

1. Στις περισσότερες περιπτώσεις το σύνολο Β δεν είναι κοινό για την f και g αλλά μπορούν να συμβούν τα εξής:

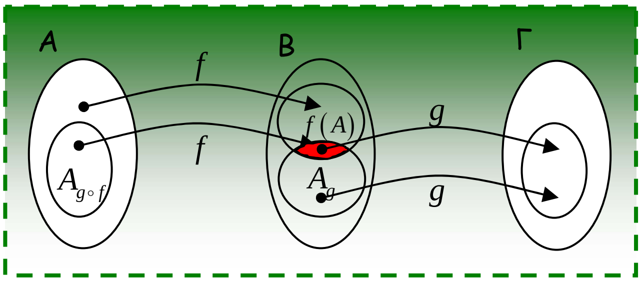
- Αν το πεδίο τιμών της f με το πεδίο ορισμού της g δεν έχουν κοινό στοιχείο τότε δεν ορίζεται η σύνθεση.



- Υπάρχει περίπτωση το πεδίο ορισμού της g να είναι όλο το $\mathbb{R}$ οπότε το πεδίο τιμών της f θα είναι υποσύνολο του, άρα η σύνθεση ορίζεται πάντα και θα έχει πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της f.



- Αν το πεδίο τιμών της f με το πεδίο ορισμού της g έχουν κοινά στοιχεία τότε η σύνθεση θα ορίζεται μόνο για τα κοινά τους στοιχεία $f(A)\cap A_g$. Έτσι πρέπει να βρίσκω ποια x από το πεδίο ορισμού της f είναι αυτά που μέσω της f αντιστοιχίζονται στα κοινά στοιχεία.



- Για να ορίζεται η σύνθεση $g\circ f$ θα πρέπει: $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}\neq\varnothing$.

2. Για να βρούμε τον τύπο της σύνθεσης $g\circ f$ αντικαθιστούμε στον τύπο της g όπου x το $f(x)$, δηλαδή: $\forall x\in A_{g\circ f}$ είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

3. Αν η συναρτήσεις f και g είναι τέτοιες ώστε να ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Εύρεση σύνθετης συνάρτησης)

Αν γνωρίζουμε την f και g και θέλουμε να ορίσουμε την $g\circ f$ τότε:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε το $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}\neq\varnothing$.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ όταν $f(x)=x^2+1$ με $x>0$ και $g(x)=-x+3$ με $x>3$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=(0,+\infty)$ και η g το $A_f=(3,+\infty)$

- Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει το σύνολο $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}\neq\varnothing$.

  Είναι:

$$A_{f\circ g}=\{x\in(3,+\infty)\,/\,-x+3\in(0,+\infty)\}=\{x\in(3,+\infty)\,/\,-x+3>0\}=$$
$$=\{x\in(3,+\infty)\,/\,x<3\}=\varnothing$$

Επομένως δεν ορίζεται η $f \circ g$.

- Για να ορίζεται η $g \circ f$ πρέπει το σύνολο $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}\neq\varnothing$.

  Είναι:

$$A_{f\circ g}=\{x\in(0,+\infty)\,/\,x^2+1\in(3,+\infty)\}=\{x\in(0,+\infty)\,/\,x^2+1>3\}=$$
$$=\{x\in(0,+\infty)\,/\,x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\}=(\sqrt{2},+\infty).$$

Άρα ορίζεται η $g \circ f$ η ποια έχει πεδίο ορισμού το $(\sqrt{2},+\infty)$ και τύπο $g\circ f(x)=g(f(x))=-f(x)+3=-x^2-1+3=-x^2+2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ όταν $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=\ln x-1$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=[-1,+\infty)$ και η g το $A_g=(0,+\infty)$.

- Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει το σύνολο $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}\neq\varnothing$.

  Είναι:

$$A_{f\circ g}=\left\{x\in(0,+\infty)/\ln x-1\in[-1,+\infty)\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)/\ln x-1>-1\right\}=$$
$$=\left\{x\in(0,+\infty)/\ln x>0\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)/\ln x>\ln 1\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)/x>1\right\}=[1,+\infty)$$

Άρα ορίζεται η $f\circ g$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+1}=\sqrt{\ln x-1+1}=\sqrt{\ln x}$

- Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει το σύνολο $A_{g\circ f}=\left\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\right\}\neq\varnothing$.

  Είναι:
  $$A_{g\circ f}=\left\{x\in[-1,+\infty)/\sqrt{x+1}\in(0,+\infty)\right\}=\left\{x\in[-1,+\infty)/\sqrt{x+1}>0\right\}=$$
  $$=\left\{x\in[-1,+\infty)/x+1>0\right\}=\left\{x\in[-1,+\infty)/x>-1\right\}=(-1,+\infty).$$

  Άρα ορίζεται η $g\circ f$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln f(x)-1=\ln\sqrt{x+1}-1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ όταν $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=e^x+1$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=(1,+\infty)$ και η g το $A_g=\mathbb{R}$.

- Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει το σύνολο $A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g\ /\ g(x)\in A_f\right\}\neq\varnothing$.

  Είναι:
  $$A_{f\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}/e^x+1>1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/e^x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\right\}=x\in\mathbb{R}$$

  Άρα ορίζεται η $f\circ g$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο
  $$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln[g(x)-1]=\ln\left[e^x+1-1\right]=\ln e^x=x$$

- Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει το σύνολο $A_{g\circ f}=\left\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\right\}\neq\varnothing$.

  Είναι:
  $$A_{g\circ f}=\left\{x\in(1,+\infty)/\ln(x-1)\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\in(1,+\infty)/x-1>0\right\}=$$
  $$=\left\{x\in(1,+\infty)/x>1\right\}=(1,+\infty).$$

  Άρα ορίζεται η $g\circ f$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(1,+\infty)$ και τύπο

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{f(x)}+1=e^{\ln(x-1)}+1=x-1+1=x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ όταν $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=[1,+\infty)$ και η g το $A_g=\mathbb{R}$.

- Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει το σύνολο $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}\neq\varnothing$.

  Είναι:

  $$A_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\in[1,+\infty)\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\geq 1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x=1\}=$$
  $$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\ldots\}$$

  Άρα ορίζεται η $f\circ g$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A_{f\circ g}$ και τύπο

  $$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-1}=\sqrt{\sigma\upsilon\nu x-1}=\sqrt{1-1}=0$$

- Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει το σύνολο $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}\neq\varnothing$.

  Είναι:

  $$A_{g\circ f}=\{x\in[1,+\infty)\,/\,\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}=\{x\in[1,+\infty)\,/\,x\geq 1\}=$$
  $$=\{x\in[1,+\infty)\,/\,x\geq 1\}=[1,+\infty).$$

  Άρα ορίζεται η $g\circ f$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και τύπο

  $$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sigma\upsilon\nu f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{x-1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-1,3)\to\mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=f(x^2-1)$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x^2-1$ η οποία έχει πεδίο ορισμού $A_g=\mathbb{R}$. Είναι $h(x)=f(x^2-1)=f(g(x))=f\circ g(x)$. Άρα η h είναι σύνθεση της g με την f. Επομένως θα έχει πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της $f\circ g$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ είναι:

$$A=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} / x^2-1\in(-1,3)\}=\{x\in\mathbb{R} / -1<x^2-1<3\}=$$
$$=\{x\in\mathbb{R} / 0<x^2<4\}=\{x\in\mathbb{R} / x\in(-2,2)\}=(-2,2)$$

Άρα η h έχει πεδίο ορισμού το $A=(-2,2)$.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ όταν:
   (α) $f(x)=x^2-6x+8$ και $g(x)=\sqrt{x+2}$
   (β) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ και $g(x)=\ln x$
   (γ) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και $g(x)=1+\sigma\upsilon\nu^2 x$
   (δ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ και $g(x)=\sqrt{x+2}$
   (ε) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ και $g(x)=\ln\dfrac{x+1}{1-x}$

2. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις fog και gof αν:
   (α) $f(x)=2x-3$ $\quad\text{και}\quad$ $g(x)=4x-1$
   (β) $f(x)=2x^2\text{-}1$ $\quad\text{και}\quad$ $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση gof αν:
   (α) $f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad\text{και}\quad$ $g(x)=\sqrt{x-1}$
   (β) $f(x)=x^2+5$ $\quad\text{και}\quad$ $g(x)=\dfrac{1}{x-9}$

4. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ όταν:
   (α) $f(x)=e^x+1$ και $g(x)=\ln(x-1)$
   (β) $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=-x^2-1$
   (γ) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και $g(x)=2x^2-1$
   (δ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ και $g(x)=\sqrt{x}$
   (ε) $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\eta\mu x$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A=(-4,0)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $h(x)=f(3x-1)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:(-1,3)\to\mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h, όταν $h(x)=f(x^2-1)$.

7. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[7,27]$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x^3+x-3)$.

8. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,7]$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g όταν:
   (α) $g(x)=f(1-2|x|)$.
   (β) $g(x)=f(x)+f(x+1)$

9. Έστω $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<3 \\ 5-x^2, & x\geq 3 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 2x+5, & x\leq 2 \\ 7-x, & x>2 \end{cases}$. Να βρεθεί η fog.

10. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:
$$f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$
(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
(β) Να βρείτε αν ορίζεται η σύνθεση $f\circ g$ και να δείξετε ότι $(f\circ g)(x)=-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(γ) Αν οι πιο πάνω συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση:
$$\left[(f-g)(x)\right]^2+2\left[f(x)+\frac{1}{2}g(x)\right]\leq f(x)-2\left[(f.g)(x)+\frac{1}{4}\right],$$
να δείξετε ότι $f=g$.

Μέθοδος 2 (Εύρεση σύνθετης συνάρτησης μέσω $f\circ g$)
Αν γνωρίζουμε την $f\circ g$ και αναζητούμε την f κάνουμε τα εξής:
Βήμα 1: Θέτουμε $g(x)=\omega$
Βήμα 2: Λύνουμε ως προς x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(x-2)=x^2-3x$ (1). Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

Αν θέσουμε στην (1) $x-2=t \Leftrightarrow x=t+2$ τότε αυτή γίνεται:

$$f(t)=(t+2)^2-3(t+2)=(t+2)(t-1)$$

Άρα η f έχει τύπο: $f(x)=(x+2)(x-1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu x-1$ και $g\circ f(x)=3\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x+5$. Να βρείτε τον τύπο της g.

Λύση

Είναι: $g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)=g(\eta\mu x-1)$, δηλαδή:

$$g(\eta\mu x-1)=3\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x+5 \Leftrightarrow g(\eta\mu x-1)=3\left(1-\eta\mu^2 x\right)-2\eta\mu x+5$$

(2)

Αν θέσουμε $\eta\mu x-1=t \Leftrightarrow \eta\mu x=t+1$, τότε η (2) γίνεται:

$$g(t)==3\left(1-(t+1)^2\right)-2t+5=-3t(t+2)-2t-2+5=-3t^2-8t+3$$

Άρα η g έχει τύπο: $g(x)=-3x^2-8x+3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Αν $f(x)=x^3-1$ και $(f\circ g)(x)=x^2+3$ να βρεθεί ο τύπος της g.

Λύση

Είναι:

$$(f\circ g)(x)=x^2+3 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=x^2+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^3(x)-1=x^2+3 \Leftrightarrow g(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$$

αφού $x^2+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασκήσεις

11. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $f(2x-1)=x^2-3x+2$, να βρείτε τον τύπο της f.

12. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x-1) = x^2$, να προσδιορίσετε το $f(x)$ και το $f(x+1)$.

13. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(x-2) = x^2 + x + 1$, να βρείτε τον τύπο της f.

14. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(\eta\mu x - 1) = 12 - 12\sigma\upsilon\nu^2 x - 9\eta\mu x$, να βρείτε τον τύπο της f.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x + 2$. Αν $(g \circ f)(x) = x^2 + 3x - 1$ να βρεθεί ο τύπος της $g(x)$.

16. Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

(α) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 6x - 2$ και $f(x) = 2x - 4$

(β) $(f \circ g)(x) = e^x + x \cdot \eta\mu x$ και $f(x) = x - 1$

(γ) $(f \circ g)(x) = 2x + 1$ και $f(x) = e^x$

17. Έστω $f(\ln 2x) = x + 3$, με $x > 0$. Να βρεθεί η f.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x - 2$ και $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

19. Αν $f(x) = x + 3$, να βρεθεί η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ g)(x) = e^{x+1} + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. Αν είναι $f(x) = 2x - 3$ και $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 10\sigma\upsilon\nu x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την g.

21. Αν $f(x+1) = x^2 - x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την τιμή $f(x)$ και την τιμή $f(3x)$.

Μέθοδος 3

Όταν μας δίνονται σχέσεις της μορφής $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x)$ και ζητείται να βρεθεί το $f(x_0)$ κάνουμε τα εξής:

Βήμα 1: Θέτουμε $x = x_0$

Βήμα 2: Θέτουμε $x = f(x)$ και

Βήμα 3: Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις που προκύπτουν βρίσκουμε το ζητούμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση: $f(f(x)) = 6x - 10$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(2) = 2$.

Λύση

Θέτουμε $x = 2$, οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε ότι: $f(f(2)) = 2$.

Θέτουμε $x = f(2)$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$f(f(f(2))) = 6f(2) - 10 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(2) = 6f(2) - 10 \Leftrightarrow f(2) = 5$$

Ασκήσεις

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$ και $(f \circ g)(1) = 1$. Να αποδειχθεί ότι οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 5x - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(1) = 1$.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $(f \circ g)(x) = x^2 - 5x + 9, x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(3) = 3$. Να αποδειχθεί ότι οι C_f, C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{-ax}{3 - x}$. Να προσδιοριστεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε $(f \circ f)(x) = x$.

26. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f\circ f)(x)=xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί $f(0)$.

27. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f\circ f)(x)=4-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί $f(2)$.

28. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f\circ f)(x)=x^5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x^5)=f^5(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

29. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f\circ g=g\circ f$ για κάθε σταθερή συνάρτηση g, να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

30. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν για κάθε σταθερή συνάρτηση h ισχύει $f\circ h=g\circ h$ να αποδείξετε ότι $f=g$.

31. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν για κάθε σταθερή συνάρτηση g ισχύει $(g\circ f)(x)=-(f\circ g)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f^5(x)+x^5=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f\circ f=I$, όπου $I(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

33. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες: $(f\circ f)(x)=4x-3$ και $(f\circ f\circ f)(x)=8x+\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

Μέθοδος 4

Όταν μας δίνονται σχέσεις της μορφής $\kappa f(\alpha-x)+\lambda f(\beta+x)=g(x)$ (1) ή $\kappa f(\alpha x)+\lambda f\left(\frac{\beta}{x}\right)=g(x)$ (2) και ζητείται να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f κάνουμε τα εξής:

Βήμα 1: Θέτουμε $\alpha-x=\beta+x$ στην σχέση (1) ή $\alpha x=\frac{\beta}{x}$ στη σχέση (2)

Βήμα 2: Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει σε κάθε περίπτωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **ισχύει** $xf(x)+f(-x)=x$ **(1) για όλα τα** x**. Να βρείτε την** f **.**

Λύση

Θέτουμε στην (1) όπου $x=-x$. Τότε έχουμε:

$$-xf(-x)+f(x)=-x \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{cases} xf(x)+f(-x)=x \\ -xf(-x)+f(x)=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2f(x)+xf(-x)=x^2 \\ -xf(-x)+f(x)=-x \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} (x^2+1)f(x)=x^2-x \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+1}$$

Άρα έχουμε ότι: $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **ισχύει** $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-1$ **(1) για όλα τα** x**. Να βρείτε την** f **.**

Λύση

Θέτουμε στην (1) όπου $x=\dfrac{1}{x}$. Τότε έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x^3}-1 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{cases} f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-1 \\ f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x^3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-1 \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)-4f(x)=2\frac{1}{x^3}-2 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} -3f(x)=x^3+\frac{2}{x^3}-3 \Leftrightarrow$$

$$f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3x^3}+1$$

Άρα έχουμε ότι: $f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3x^3}+1$.

Ασκήσεις

34. Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $xf(x)+f(1-x)=x^2+x+3$ για όλα τα x. Να βρείτε την f.

35. Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x-1)-2f(2-x)=x^2-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

36. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

(α) $f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y$

(β) $f(x)f(y)+1=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(γ) $f(x+y)=f^2(x)+f^2(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

37. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$x\left[f(x)+f(-x)+2\right]+2f(-x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

(β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Μέθοδος 5

Όταν μας δίνεται μια ανισοτική σχέση και μας ζητείται ο τύπος μιας συνάρτησης f τότε προσπαθούμε να δημιουργήσουμε τις σχέσεις: $f(x)\le g(x)$ και $f(x)\ge g(x)$ οπότε: $f(x)=g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Να βρείτε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)+4x-5\le x^2\le f(x+2)-1, x\in\mathbb{R}$ (1).

Λύση

Από την σχέση (1) παίρνουμε δύο ανισώσεις:

$$f(x)+4x-5\le x^2 \Leftrightarrow f(x)\le x^2-4x+5 \text{ και}$$

$$x^2 \le f(x+2)-1 \Leftrightarrow f(x+2) \ge x^2+1 \overset{\text{Θέτουμε t=x+2}}{\Leftrightarrow}$$
$$f(t) \ge (t-2)^2+1 \Leftrightarrow f(t) \ge t^2-4t+5$$

Άρα $f(x) \ge x^2-4x+5$ και $f(x) \le x^2-4x+5$ οπότε προκύπτει ότι: $f(x)=x^2-4x+5$.

Ασκήσεις

38. Δίνεται περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x^2 f(x) \ge x^4 \eta\mu x + x, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

39. Αν $f(x+\lambda) \le x \le f(x)+\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και λ σταθερό αριθμό να δείξετε ότι: $f(x)=x-\lambda$.

40. Μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x \le f(x)-1$ για κάθε $x>0$.
    (α) Να προσδιοριστεί ο τύπος της f.
    (β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

Μέθοδος 6

Όταν μας δίνεται μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(x+y)=\cdots$ ή $f(x\cdot y)=\cdots$ εργαζόμαστε ανάλογα με το τι μας ζητάει το πρόβλημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση: $f(x+y)=2f(x)+2f(y)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

(α) $f(0)=0$

(β) Η f είναι περιττή

(γ) Η f είναι σταθερή

Λύση

(α) Θέτουμε $x=y=0$, οπότε από την (1) παίρνουμε ότι:
$$f(0)=2f(0)+2f(0) \Leftrightarrow f(0)=0.$$

(β) Θέτουμε $y=-x$ οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε ότι:

$$f(0)=2f(x)+2f(-x)\overset{(a)}{\Leftrightarrow} f(x)=-f(x)$$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

(γ) Θέτουμε $y=0$ οπότε από την σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$f(x)=2f(x)+2f(0)\Leftrightarrow f(x)=0$$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Ασκήσεις

41. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(xy)=\frac{1}{6}f(x)\cdot f(y)+\frac{5}{2}xy-x^2$$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(α) Να αποδειχθεί ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.

(β) Να βρεθεί ο τύπος της f.

42. Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x,y\neq 0$ ισχύει:

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(1)=0$.

(β) Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

(γ) Για κάθε $x,y\neq 0$ ισχύει $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

(δ) Αν για το $x\neq 0$ ισχύει $x^v=a(v\in\mathbb{N})$ τότε $f(a)=vf(x)$.

(ε) $f(-1)=0$.

(ζ) Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $f(-x)=f(x)$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες:

$f(x)\leq x^3$ και $f(x+y)\leq f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε το $f(0)$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(-x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

(δ) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

44. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+y)\geq f(x)f(y)\geq e^{x+y}$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

45. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f(x+y)\leq e^{x}f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: $f(x)=e^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

46. (α) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια, να αποδείξετε ότι η $g\circ f$ είναι άρτια.
(β) Αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)$ είναι άρτια.