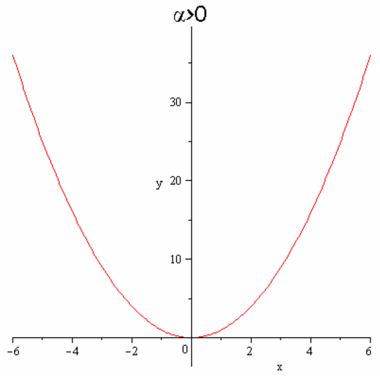
Γραφική παράσταση συνάρτησης

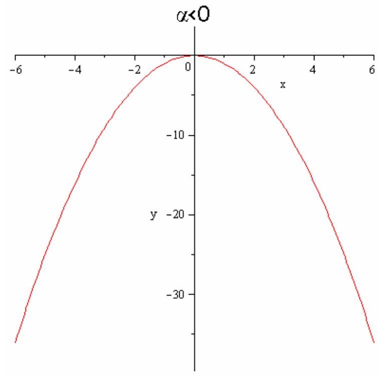
Γράφημα μιας συνάρτησης $f(x)$ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $G(f)=\{(x,f(x))/x\in A\}$ που είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το γράφημα αυτό συνήθως παριστάνεται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο και ονομάζεται **γραφική παράσταση** της $f(x)$. Το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x)$ όταν και μόνο όταν, $y=f(x)$. Όλες οι συναρτήσεις δεν μπορούν να παρασταθούν στο καρτεσιανό επίπεδο όπως για παράδειγμα η συνάρτηση του Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{όταν ο x ρητός}\\ 1 & \text{όταν ο x άρρητος}\end{cases}.$$

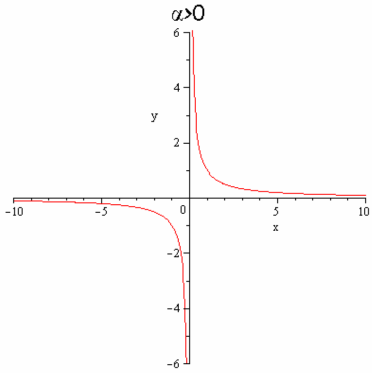
Γραφικές παραστάσεις γνωστών συναρτήσεων

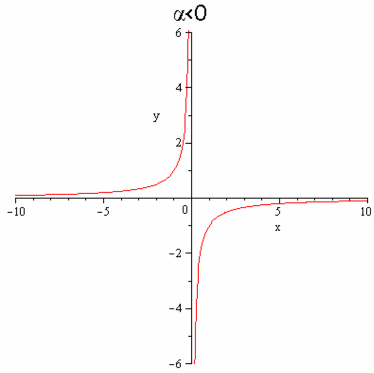
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=ax^2$.



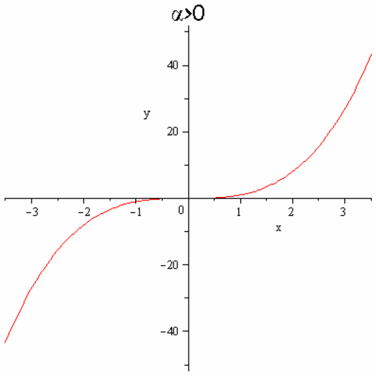


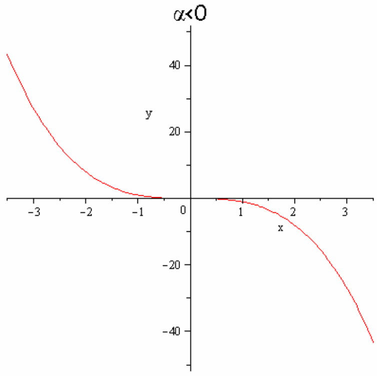
Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{a}{x}$.



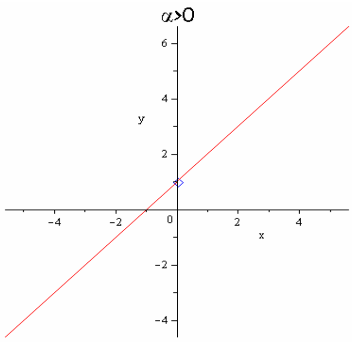


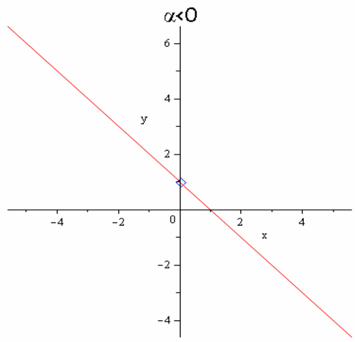
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=ax^3$.



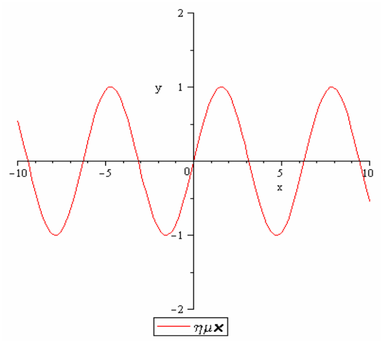


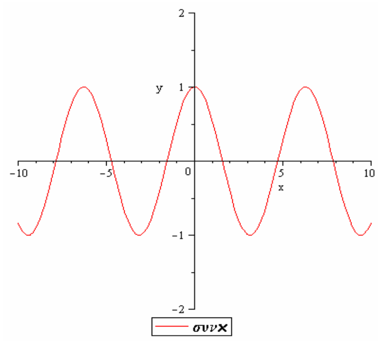
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=ax+b$.

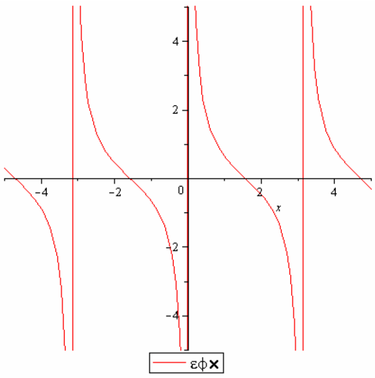


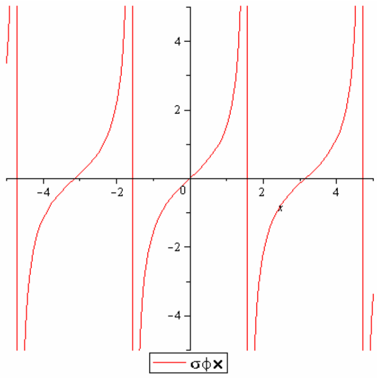


Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\phi x$, $f(x)=\sigma\phi x$

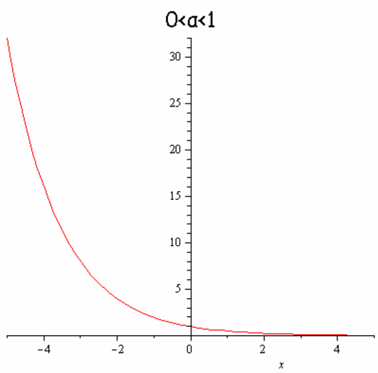


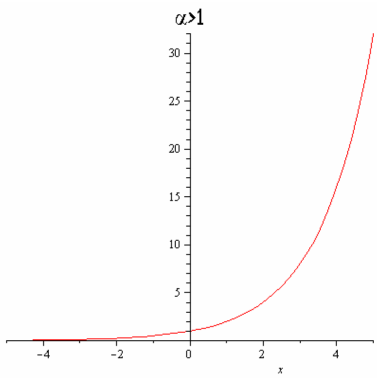




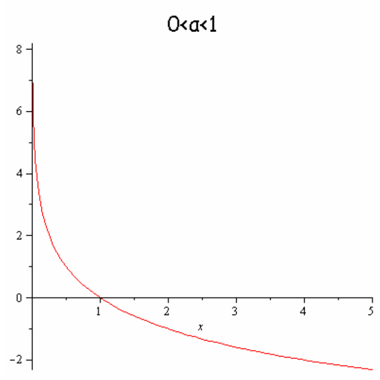


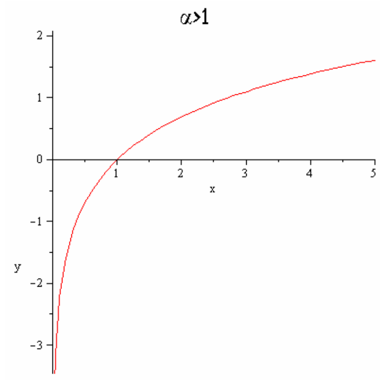
Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$





Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$





Παρατηρήσεις

- Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι δυνατών να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ή περισσότερα σημεία (ή σε κανένα). Τον άξονα $y'y$ όμως μπορεί να τον τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1 (Κοινά σημεία μιας συνάρτησης με τους άξονες)

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ ή τα κοινά σημεία δύο συναρτήσεων f και g λύνουμε αντίστοιχα την εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=g(x)$.

Για να βρούμε το κοινό σημείο μιας γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ θέτουμε όπου $x=0$ και βρίσκουμε το $f(0)$. Το σημείο $(0, f(0))$ είναι το σημείο τομής της f με τον άξονα $y'y$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=3-\ln(x+2)$ με τους άξονες.

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 3-\ln(x+2)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=3 \Leftrightarrow \ln(x+2)=\ln e^3 \Leftrightarrow x=e^3-2$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $x=e^3-2$.

Θέτουμε όπου $x=0$ οπότε $f(0)=3-\ln 2$. Άρα το σημείο τομής της f με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0,3-\ln 2)$.

Μέθοδος 2

Η C_f μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ μόνο όταν:

$$x \in D_f \text{ και } f(x) > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Πρέπει:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (2+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ μόνο όταν $x \in (-2,1)$.

Μέθοδος 3

Επίσης Η C_f μιας συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $y'y$ μόνο όταν:

$$x \in D_f \text{ και } f(x) < 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{x-1} - 1$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

Πρέπει:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < e^0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ μόνο όταν $x \in (-\infty,1)$.

Μέθοδος 4

Έστω f,g συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα και $A \cap B \neq \varnothing$. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για εκείνα και μόνο τα $x \in A \cap B$ για τα οποία είναι $f(x) > g(x)$ (αντίστοιχα $f(x) < g(x)$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g όταν $f(x) = x^3 + 5x + e^x$ και $g(x) = 6x + e^x$.

Λύση

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι $A_f = A_g = \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 5x + e^x > 6x + e^x \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) > 0$$

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x(x-1)(x+1)$		-	0	+	0	-	0	+	

Επομένως η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη g μόνο όταν $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f, C_g.

Λύση

Έχουμε ότι $f(x) = g(x) + e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = e^x - 1$. Θέτουμε $h(x) = e^x - 1$.

- Αν $h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$, άρα για $x > 0$ είναι $f(x) > g(x)$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.
- Αν $h(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$, άρα για $x < 0$ είναι $f(x) < g(x)$ οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g.
- Αν $h(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$, άρα για $x = 0$ είναι $f(x) = g(x)$ οπότε η C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(0,0)$.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν), τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$

(β) $f(x)=1-2\eta\mu x$

(γ) $f(x)=\dfrac{x-3}{x}$

(δ) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

(ε) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{8}{x}$

(β) $f(x)=x^2-3x+2$ και $g(x)=\dfrac{6}{x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+(2-a)x+a^2-5$, $a\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(1,-6)$.

(β)Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,-6)$ να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f και του άξονα $x'x$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+3x^2++x+1$, $g(x)=x^2+2x+3$:

(α) Πότε η C_f είναι «πάνω» από τη C_g ;

(β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g και να αποδείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου με εμβαδόν Ε = 3τ.μ.

5. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει γραφική παράσταση, η οποία είναι παραβολή. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(-1,6), Β(1,0) και Γ(2,0) να βρεθεί:

(α) Ο τύπος της f, και να σχεδιασθεί η C_f.

(β) Τα κοινά σημεία της C_f και του άξονα $x'x$.

(γ) Τα διαστήματα που η C_f είναι κάτω από τον $x'x$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)-2f^2(x)+5f(x)=-e^{-2x}-e^x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $g(x)=f(x)+x^2-1$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f,C_g.

8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3+(2-\alpha)x^2-(\alpha+3)x+\alpha^2-5,\ \alpha\in\mathbb{R}$

(α) Να βρεθούν οι τιμές του α έτσι, ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,0)$.

(β) Για $\alpha=1$:

(1) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

(2) Να βρεθεί η σχετική θέση της C_f με τον άξονα $x'x$.

(3) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, όπου $g(x)=-4x-4$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x}{x^2+\beta x+1},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,-1)$ και $\mathrm{B}\left(2,-\dfrac{4}{7}\right)$.

(α) Να βρεθούν τα α,β.

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

(γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=1$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(1,+\infty)$ και η g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(x)=f^3(x)-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_g δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Ίσες συναρτήσεις

Ορισμός

Δύο συναρτήσεις f,g θα λέγονται **ίσες**, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$. Δηλαδή

$$f=g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f=D_g=A \\ f(x)=g(x) \text{ για κάθε } x\in A \end{cases}$$

Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ και έστω $A\cap B\neq\varnothing$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f+g$, **διαφορά** $f-g$, **γινόμενο** $f\cdot g$ και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ των συναρτήσεων f,g τις συναρτήσεις με τύπους:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και $f\cdot g$ είναι η τομή $A\cap B\neq\varnothing$ των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και g, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B\neq\varnothing$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$.

Λυμένες ασκήσεις

Μέθοδος 1

Αν Α και Β είναι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα και ισχύει $\Gamma\subseteq A$ και $\Gamma\subseteq B$, θα λέμε ότι οι f και g είναι ίσες στο Γ μόνο όταν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}$ $g(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ **είναι ίσες. Να βρεθεί σύνολο στο οποίο να είναι ίσες.**

Λύση

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A_f της συνάρτησης f :

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 3 \Leftrightarrow A_g=[3,+\infty)$$

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A_g της συνάρτησης g:

$$x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty) \Leftrightarrow A_g=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$$

Αφού $A_f\neq A_g \Leftrightarrow f\neq g$.

- Για να είναι ίσες οι f,g θα έπρεπε $A_f=A_g=[3,+\infty)$ τότε:

$$f(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-5x+6}=g(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x}$, $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$. **Να βρεθούν:**

(α) $f+g$, $f\cdot g$

(β) $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$

Λύση

(α) Βρίσκουμε αρχικά τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

- $x^2-2x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 2 \Leftrightarrow A_f=\mathbb{R}-\{0,2\}$
- $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3 \Leftrightarrow A_g=\mathbb{R}-\{3\}$

Άρα $A_{f+g}=A_{fg}=A_f\cap A_g=\mathbb{R}-\{0,2,3\}\neq\varnothing$

Τότε: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x}+\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}=\cdots$

Τότε: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x}\cdot\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}=\cdots$

(β) Για να ορίζεται η $\dfrac{f}{g}$ πρέπει

$$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x-3}\neq 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ και } x\neq 2$$

Άρα $A_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$

Τότε: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2-2x}}{\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}}=\cdots$

Για να ορίζεται η $\frac{g}{f}$ πρέπει:

$$f(x)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2-2x}\neq 0 \Leftrightarrow x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \ \text{και}\ x\neq -1$$

Άρα $A_{\frac{g}{f}}=\mathbb{R}-\{-1,0,1,2,3\}$

Τότε: $$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\frac{x^2-3x+2}{x-3}}{\frac{x^2-1}{x^2-2x}}=\cdots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \quad (\alpha) \\ x+1 & x\geq 0 \quad (\beta) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x-2 & x\leq 3 \quad (\gamma) \\ x+2 & x>3 \quad (\delta) \end{cases}.$$

Να βρεθεί η $f+g$

Λύση

(α),(γ): Για $\left.\begin{cases} x<0 \\ x\leq 3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x<0$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x-1+x-2=2x-3$$

(α),(δ): Για $\left.\begin{cases} x<0 \\ x>3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$ δεν ορίζεται πράξη (τα δύο σύνολα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο)

(β),(γ): Για $\left.\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 3$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+1+x-2=2x-1$$

(β),(δ): Για $\left.\begin{cases} x\geq 0 \\ x>3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x>3$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+1+x+2=2x+3$$

Άρα: $$(f+g)(x)=\begin{cases} 2x-3 & x<0 \\ 2x-1 & 0\leq x\leq 3 \\ 2x+3 & x>3 \end{cases}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού το $A\subseteq\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f+g)(x)\cdot\left((f+g)(x)-6\right)=2\left((fg)(x)-9\right)$ για κάθε $x\in A$. Να αποδείξετε ότι $f=g$

Λύση

Έχουμε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει:

$$(f+g)(x)\cdot\left((f+g)(x)-6\right)=2\left((fg)(x)-9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(f(x)+g(x)\right)\left(f(x)+g(x)-6\right)=2\left(f(x)g(x)-9\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+f(x)g(x)-6f(x)+g(x)f(x)+g^2(x)-6g(x)=2f(x)g(x)-18\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-6f(x)+g^2(x)-6g(x)+18=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-6f(x)+9+g^2(x)-6g(x)+9=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-3\right]^2+\left[g(x)-3\right]^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)-3=0\\g(x)-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=3\\g(x)=3\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία είναι ίσες οι παρακάτω συναρτήσεις:
   (α) $f(x)=\ln(x+2007)+\ln(2007-x)$ και $g(x)=\ln\left(2007^2-x^2\right)$
   (β) $f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$ και $g(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-2}$
   (γ) $f(x)=4\ln(x-4)$ και $g(x)=\ln(x-4)^4$

2. Αν $f(x)=\dfrac{x+2}{x+a}$ και $g(x)=\dfrac{ax^2+a+1}{x+2-a}$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a έτσι ώστε $f=g$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\kappa x+4}{x-\lambda+2}$ και $g(x)=\dfrac{3x+2\lambda-2}{x+2\lambda-7}$. Να ορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ ώστε $f=g$.

4. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\left[(f+g)(x)\right]^2 + 8 \leq f(x)\cdot(g(x)+4) + g(x)\cdot(f(x)+4)$ για κάθε $x \in A$. Να δείξετε ότι $f = g$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\left(f^2 + g^2\right)(x) \leq 2\left(f+g\right)(x) - 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f = g$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x-2}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$.

7. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ όταν:

(α) $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$ και $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

(β) $f(x) = \dfrac{1}{2-|x|}$ και $g(x) = \dfrac{|x|-3}{x^2-4}$

8. Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{(\lambda+1)x - 1}{x + \lambda^2 - 1}$ και $g(x) = \dfrac{(1-2\lambda)x + \lambda - 1}{\lambda - x - 5}$ να είναι ίσες.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = |x-1|$, $g(x) = \begin{cases} x & x \geq 2 \\ e^x - 1 & x < 2 \end{cases}$. Να βρεθούν οι $f-g$, $\dfrac{f}{g}$.

10. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \leq 2 \\ -x^2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ να ορίσετε τις συναρτήσεις: (α) $f+g$ (β) $f\cdot g$ (γ) $\dfrac{f}{g}$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι $f = g$, όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η αντίστοιχη σχέση:

(α) $\left[f(x)+g(x)\right]\left[\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\right]=4,\ f(x)g(x)\neq 0$

(β) $f(x)\left[f(x)-g(x)\right]+g(x)\left[g(x)-h(x)\right]+h(x)\left[h(x)-f(x)\right]=0$

(γ) $f(x)+f(y)=g(x)+g(y),\quad x\neq y$

(δ) $f^3(x)+g^3(x)+h^3(x)=3f(x)g(x)h(x)$

12. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Αν όχι να βρείτε το ευρύτερο σύνολο στο οποίο αυτές είναι ίσες.

(α) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}$ και $g(x)=\frac{x-1}{x-3}$

(β) $f(x)=\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ και $g(x)=\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

(γ) $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

13. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x)=2x\left[5f(x)-g(x)-13x\right],\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

14. Αν η συνάρτηση f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\left((f+g)(x)\right)^2-2(fg)(x)-2\left(f(x)\eta\mu x-g(x)\sigma\upsilon\nu x\right)+1=0$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=-\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x\in A$ ισχύει: $\left((f-g)(x)-1\right)^2(f-g)(x)+2(f-g)(x)=2$ να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)+1$ για κάθε $x\in A$.

Άρτια- περιττή συνάρτηση

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται:

- **Άρτια** όταν για κάθε $x \in A$ και το $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- **Περιττή** όταν για κάθε $x \in A$ και το $-x \in A$ και ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- **Περιοδική** όταν υπάρχει αριθμός $T \in \mathbb{R}^*$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ και το $x + T \in A$ και να ισχύει $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Λυμένες ασκήσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

(α) $f(x) = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + 3$ **(β)** $g(x) = x^5 - 3x^3 + x$ **(γ)** $h(x) = \ln(x^2+1)$

Λύση

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$f(-x) = \eta\mu^2(-x) - \sigma\upsilon\nu(-x) + 3 = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x + 3 = f(x)$. Άρα η f είναι άρτια.

2. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$g(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -(x^5 - 3x^3 + x) = -g(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

3. Η h έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$h(-x) = \ln\left[(-x)^2 + 1\right] = \ln(x^2+1) = h(x)$. Άρα η h είναι άρτια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ είναι άρτια ή περιττή.

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(-x)=\ln\left[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)\right]=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$
$$=\ln 1-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (1), για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αν $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι:

(α) $f(0)=0$

(β) η f είναι περιττή

Λύση

(α) Θέτω $x=y=1$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$f(1)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$$

(β) Θέτω $y=-x$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

άρα η f είναι περιττή.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Να αποδείξετε ότι:

   (α) η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

   (β) η f είναι περιττή

   (γ) η C_f έχει με τον $x'x$ μόνο ένα κοινό σημείο.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)-f(-x)=e^x+e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

   (α) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0,2)$.

   (β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι είναι άρτια συνάρτηση.

3. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|x|f(x)\le x^5\sigma\upsilon\nu x$, να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3|x|\sigma\upsilon\nu x$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)+2f(-x)=\pi\cdot\eta\mu(2x+\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

5. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:
$$x\left[f(x)+f(-x)+2\right]+2f(-x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$
(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή
(β) Να βρείτε τον τύπο της f.

6. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

7. Δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουν τις ιδιότητες: $f^2(x)=f(x)f(-x)$ και $g^2(x)=-g(x)g(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή.

8. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
(α) Αν f περιττή και g άρτια να δείξετε ότι η $f\cdot g$ είναι περιττή.
(β) Αν f,g άρτιες να δείξετε ότι η συνάρτηση $f-g$ είναι άρτια.
(γ) Αν f άρτια και g περιττή να δείξετε ότι η $\dfrac{f}{g}$ είναι περιττή.
(δ) Αν f,g άρτιες (ή περιττές) να δείξετε ότι η $\dfrac{f}{g}$ είναι άρτια.