Τίποτα στη ζωή δεν είναι για να το φοβόμαστε, αλλά για να το κατανοήσουμε. ***Marie Curie***

Υλικό σημείο ή σημειακό αντικείμενο: Σώμα του οποίου οι διαστάσεις θεωρούνται αμελητέες.

Μονόμετρο μέγεθος: Ονομάζεται το μέγεθος που μπορεί να περιγραφεί πλήρως με το μέτρο του, δηλαδή με ένα νούμερο.

Διανυσματικό μέγεθος: Ονομάζεται το μέγεθος που για να περιγραφεί πλήρως πρέπει να γνωρίζουμε τη διεύθυνση (ευθεία κίνησης), τη φορά και το μέτρο.

Πυκνότητα: $\rho = \frac{m}{V} \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ μονόμετρο μέγεθος που εκφράζει τη μάζα ανά μονάδα όγκου.

Πίεση: $p = \frac{F}{A} \left(\frac{N}{m^2} = Pa\right)$ μονόμετρο μέγεθος που εκφράζει την κάθετη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας.

Μετατόπιση: $\Delta\vec{x} = \vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$ (m) διανυσματικό μέγεθος, ανεξάρτητο της ενδιάμεσης διαδρομής.

Διάστημα: s (m) μονόμετρο μέγεθος, ισούται με το συνολικό μήκος της τροχιάς κίνησης ενός αντικειμένου.

Ταχύτητα: $\vec{u} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ (m/s) διανυσματικό μέγεθος, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης ενός σώματος.

Επιτάχυνση: $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ (m/s^2) διανυσματικό μέγεθος, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος.

Αδράνεια: Είναι η ιδιότητα ή η τάση των σωμάτων να αντιστέκονται σε οποιαδήποτε αλλαγή της ταχύτητάς τους. Μέτρο της αδράνειας είναι η μάζα του σώματος.

Δύναμη: $\vec{F}$ (N) Είναι το αίτιο επιτάχυνσης ή παραμόρφωσης ενός σώματος. Διανυσματικό μέγεθος.

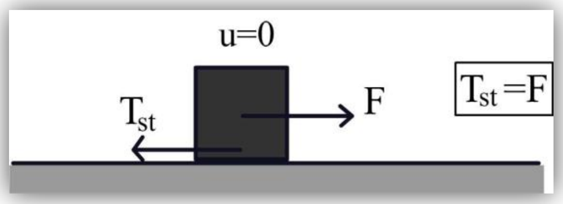
Ορμή: $\vec{p} = m \cdot \vec{u}$ $(kg \cdot m/s)$ Είναι διανυσματικό μέγεθος, ομόρροπο της ταχύτητας.

Επιτάχυνση βαρύτητας: $\vec{g}$ Είναι η επιτάχυνση που έχει ένα σώμα όταν η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος του. Όταν το σώμα βρίσκεται σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γής το $\vec{g}$ θεωρείται σταθερό.

Τριβή: Είναι η δύναμη επαφής που αντιστέκεται στην κίνηση ή στην προσπάθεια κίνησης ενός ακίνητου σώματος.

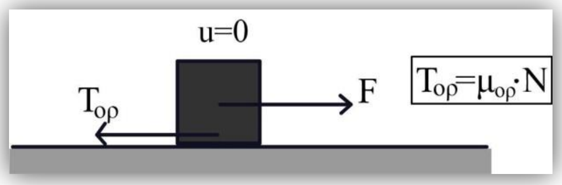
- Στατική Τριβή (T_{st}):

Ασκείται σε ένα σώμα όταν αυτό είναι ακίνητο και προσπαθεί να κινηθεί. Είναι ίση με τη δύναμη που προσπαθεί να κινήσει το σώμα.



- Οριακή Τριβή ($T_{ορ}$ ή $T_{st,max}$):

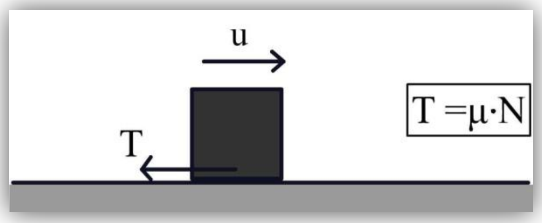
Είναι η μέγιστη στατική τριβή. Ασκείται στο σώμα που προσπαθεί να κινηθεί ακριβώς πριν «ξεκολλήσει».



Σημαντικό: Όταν μου δίνουν το συντελεστή στατικής τριβής $μ_s$ αυτός είναι ο συντελεστής της οριακής τριβής (μέγιστης στατικής).

- Τριβή ολίσθησης (T ή $T_ρ$):

Είναι η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος. Είναι μικρότερη από την οριακή τριβή.



<u>Νόμοι Κίνησης Newton:</u>

● 1^{ος} Εκφράζει την Αδράνεια

Όταν $\boxed{\boldsymbol{\Sigma\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} = \sigma\tau\alpha\theta \quad \text{ή} \quad \vec{u} = 0}}$

● 2^{ος} Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής:

$$\boxed{\boldsymbol{\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}}}$$

● 3^{ος} Δράση – Αντίδραση

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}}}$$

Όλες οι δυνάμεις στη φύση ασκούνται σε ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων.

Η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά, πάντα σώματα.

Η δράση και η αντίδραση είναι δυνάμεις ίδιου είδους (π.χ. Κάθετη αντίδραση δαπέδου σε σώμα και κάθετη αντίδραση σώματος στο δάπεδο).

Όταν ασχολούμαστε με ένα σώμα, δεν επιτρέπεται να πούμε ότι η δράση και η αντίδραση δίνουν μηδενική συνισταμένη, διότι δεν ασκούνται πάνω σε αυτό. Για ένα σύστημα όμως σωμάτων η δράση και η αντίδραση είναι εσωτερικές δυνάμεις και έτσι έχουν μηδενική συνισταμένη.

● Γενίκευση θεμελιώδους νόμου μηχανικής (Ρυθμός μεταβολής της ορμής)

$$\boldsymbol{\vec{p} = m \cdot \vec{u} \;\Rightarrow\; \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m \cdot \vec{a} \;\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}}}$$

<u>Κινητική Ενέργεια σώματος:</u> Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα όταν κινείται. Μονόμετρο μέγεθος.

$$\boxed{\boldsymbol{K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 \; (J)}}$$

Μια άλλη, χρήσιμη μορφή του τύπου της κινητικής ενέργειας είναι η:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 \;\Rightarrow\; K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{p}{m}\right)^2 \Rightarrow\; K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{p^2}{m^2} \;\Rightarrow\; K = \frac{p^2}{2m}}$$

<u>Δυναμική Βαρυτική Ενέργεια σώματος</u>: Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της θέσης του σε σχέση με το επίπεδο της μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας. Είναι μονόμετρο μέγεθος.

$$\boxed{\boldsymbol{U_B = \pm m \cdot g \cdot h \ (J)}}$$

+ όταν βρίσκεται πάνω από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας *(h=0)*

- όταν βρίσκεται κάτω από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας *(h=0)*

<u>Μηχανική Ενέργεια Σώματος:</u> Είναι το άθροισμα της Κινητικής και της Δυναμικής Ενέργειας. Είναι μονόμετρο μέγεθος.

$$\boxed{\boldsymbol{E_M = K + U \ (J)}}$$

<u>Έργο δύναμης</u>

Το έργο μίας δύναμης ισούται με τη μεταβολή ενέργειας ή τη μετατροπή ενέργειας από μία μορφή σε άλλη. Το έργο μίας δύναμης εκφράζει το ενεργειακό αποτέλεσμα της άσκησης μίας δύναμης. Είναι μονόμετρο μέγεθος.

<u>Υπολογισμός έργου δύναμης</u>

● Αν η δύναμη έχει σταθερό μέτρο, τότε: $\boxed{\boldsymbol{W_F = |F| \cdot |\Delta x| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \ (J)}}$

Όπου θ η γωνία μεταξύ δύναμης και μετατόπισης

Από τον παραπάνω τύπο γίνεται αντιληπτό ότι δύναμη που είναι διαρκώς κάθετη στην κίνηση δεν έχει έργο. Ακόμη και σε μία καμπυλόγραμμη κίνηση αν μία δύναμη είναι διαρκώς κάθετη στην κίνηση δεν έχει έργο διότι είναι διαρκώς κάθετη σε κάθε μία απειροελάχιστη στοιχειώδη μετατόπιση(π.χ. η κεντρομόλος δύναμη ,η τάση του νήματος σε κάποια κυκλική κίνηση και η κάθετη αντίδραση ακλόνητου δαπέδου).

● Αν η δύναμη έχει μεταβλητό μέτρο (π.χ. F=10+2x) , το έργο της ισούται με το εμβαδό (αλγεβρικά) του διαγράμματος F_x – x.

● Αν δε γνωρίζουμε κάτι για τη δύναμη, παρά το ότι ασκείται, το έργο της μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα από το Θ.Μ.Κ.Ε.

Συντηρητικές (ή διατηρητικές) Δυνάμεις:

Ονομάζονται οι δυνάμεις που όταν ασκούνται σε ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων, **διατηρούν τη Μηχανική Ενέργεια σταθερή**. Για την ύλη της Γ Λυκείου μας ενδιαφέρει το **βάρος** και η **δύναμη του ελατηρίου**.

Το έργο μίας συντηρητικής δύναμης εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση και όχι από την ενδιάμεση διαδρομή.

Το έργο συντηρητικής δύναμης σε κλειστή διαδρομή (αρχή και τέλος συμπίπτουν) είναι ίσο με το μηδέν.

Η κάθε μία συντηρητική δύναμη συνδέεται με την αντίστοιχη δυναμική της ενέργεια.

Το έργο τους ισούται με την αντίθετη μεταβολή της δυναμικής τους ενέργειας.

$$\boxed{\boldsymbol{W_{F,\Sigma\upsilon\nu\tau} = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda}}}$$

● Βάρος $\boxed{\vec{w} = m \cdot \vec{g}}$ (Είναι η κατακόρυφη δύναμη με την οποία η Γη έλκει τα σώματα που βρίσκονται σε μικρό ύψος από την επιφάνειά της)

Έργο βάρους:

$$\boxed{\boldsymbol{W_w = -\Delta U = U_{B,\alpha\rho\chi} - U_{B,\tau\varepsilon\lambda} = m \cdot g \cdot h_{\alpha\rho\chi} - m \cdot g \cdot h_{\tau\varepsilon\lambda}}}$$

Τα ύψη $h_{\alpha\rho\chi}$ και $h_{\tau\varepsilon\lambda}$ μετριούνται από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας που έχουμε ορίσει.

Ένας πιο γρήγορος τρόπος υπολογισμού του Έργου Βάρους είναι το:

$$\boxed{\boldsymbol{W_w = \pm |m \cdot g \cdot \Delta y|}}$$

\+ *όταν το βάρος βοηθάει στην κίνηση, δηλαδή στην κάθοδο*

\- *όταν το βάρος αντιστέκεται στην κίνηση, δηλαδή στην άνοδο*

όπου Δy η κατακόρυφη υψομετρική διαφορά αρχικής και τελικής θέσης.

● Δύναμη Ιδανικού Ελατηρίου: $\boxed{\boldsymbol{F_{\varepsilon\lambda} = -k \cdot \Delta l}}$

(στις ασκήσεις το πρόσημο της $F_{\varepsilon\lambda}$ μπαίνει αναλόγως τη θετική φορά της άσκησης)

Όπου:

• $\boldsymbol{F_{ελ}}$ η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στα άκρα του σε **N**

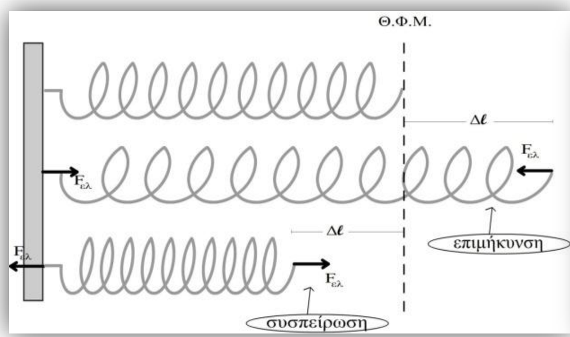
• ***k*** η σταθερά του ελατηρίου σε **N/m**

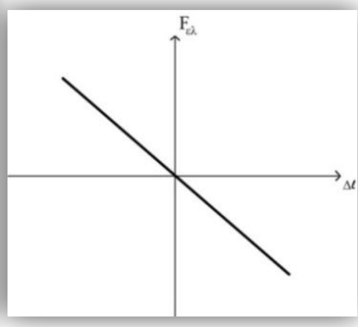
Το k εξαρτάται από τα γεωμετρικά και φυσικά χαρακτηριστικά του ελατηρίου.

• ***Δl*** η παραμόρφωση του ελατηρίου σε **m**

*Το Δl μετριέται από τη **Θέση Φυσικού Μήκους (Θ.Φ.Μ.)** του ελατηρίου και λέγεται επίσης επιμήκυνση ή συσπείρωση αν αντίστοιχα το ελατήριο επιμηκύνεται ή συσπειρώνεται.*

Η δύναμη $\boldsymbol{F_{ελ}}$ έχει πάντα τέτοια φορά ώστε να επαναφέρει το ελατήριο στη θέση Φυσικού Μήκους (Θ.Φ.Μ.) όπως φαίνεται και παρακάτω:





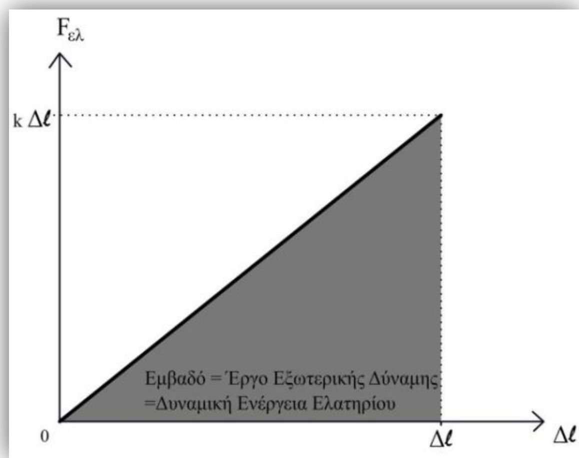
Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου

Όταν ένα ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος δεν έχει δυναμική ενέργεια. Όταν μία εξωτερική δύναμη προκαλεί μία παραμόρφωση στο ελατήριο, αυτό αποκτά δυναμική ενέργεια η οποία ισούται με το έργο της δύναμης που το παραμόρφωσε.

Η εξωτερική αυτή δύναμη που παραμορφώνει το ελατήριο πρέπει να καταφέρει να υπερνικήσει τη δύναμη του ελατηρίου που αντιστέκεται. Έτσι πρέπει κάθε στιγμή να έχει τουλάχιστον ίσο μέτρο με τη δύναμη του ελατηρίου.

Άρα: $\boldsymbol{F_{εξ}=F_{ελ}=k \cdot Δl}$

Το έργο αυτής της μεταβλητής δύναμης θα ισούται λοιπόν με τη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο.



Συνεπώς έχουμε:

$W_{Fεξ}$ = $U_{ελ}$ = Εμβαδό τριγώνου= $\dfrac{k \cdot \Delta l \cdot \Delta l}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l^2$

<u>Άρα, Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου:</u> $\boxed{\boldsymbol{U_{ελ} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot Δl^2}\ (J)}$

<u>Έργο της $F_{ελ}$:</u> $\boxed{\boldsymbol{W_{Fελ}=U_{ελ,αρχ}-U_{ελ,τελ}}\ (J)}$

Ενεργειακά Εργαλεία:

● ***Θεώρημα μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)***

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των έργων των δυνάμεων που ασκήθηκαν σε αυτό.

Ισχύει πάντα, δε βολεύει όταν μπλέκει ο χρόνος και όταν υπολογίζουμε κάποια ταχύτητα δε γνωρίζουμε το πρόσημό της.

$$\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F1} + W_{F2} + \cdots$$

● **Αρχή Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)**

Όταν σε ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (και αν ασκούνται άλλες έχουν μηδενικό έργο) η Μηχανική Ενέργεια παραμένει σταθερή. Δε βολεύει όταν μπλέκει ο χρόνος και όταν υπολογίζουμε κάποια ταχύτητα δε γνωρίζουμε το πρόσημό της.

$$E_{M,\alpha\rho\chi} = E_{M,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

Αρχή επαλληλίας ή ανεξαρτησίας των κινήσεων

Όταν ένα σώμα εκτελεί δύο ή περισσότερες κινήσεις ταυτόχρονα, το συνολικό αποτέλεσμα των κινήσεων αυτών μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας τα αποτελέσματα που θα είχε αν έκανε την κάθε μία κίνηση χωριστά.

Περιοδικά φαινόμενα

Ονομάζονται τα φαινόμενα τα οποία επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε ίσα χρονικά διαστήματα.

● **Περίοδος (Τ) :** Ονομάζεται το χρονικό διάστημα για μία πλήρη επανάληψη ενός περιοδικού φαινομένου.

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{\Delta t}{N}\ \text{(s)}}$$

Όπου:

- **Δt** το χρονικό διάστημα σε s
- **N** ο αριθμός επαναλήψεων

● **Συχνότητα (f):** είναι ο αριθμός ο οποίος εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός περιοδικού φαινομένου στη μονάδα του χρόνου (στο 1 s).

$$\boxed{f = \frac{N}{\Delta t}\ \text{(Hz)}}$$

Όπου:
- **Δt** το χρονικό διάστημα σε s
- **N** ο αριθμός επαναλήψεων

● **Σχέση Συχνότητας - Περιόδου :**

Για μία επανάληψη ισχύει ότι Ν=1 και Δt=Τ. Συνεπώς από τους παραπάνω τύπους θα έχουμε:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad \text{και} \quad \boxed{T = \frac{1}{f}}$$

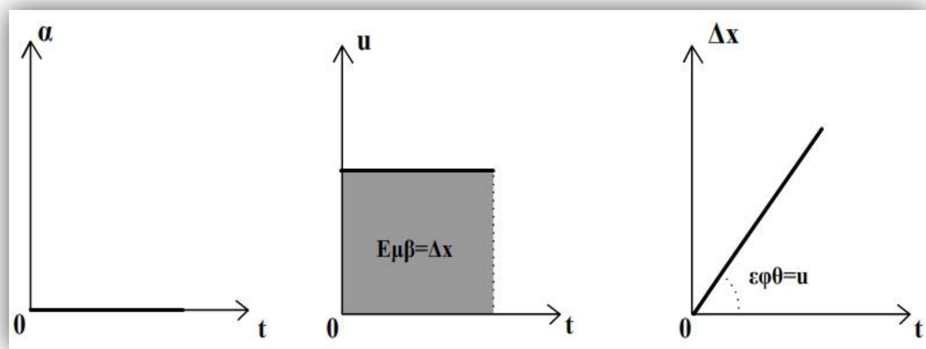
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι τα μεγέθη Περίοδος και Συχνότητα είναι αντίστροφα.

Κινήσεις:

● **Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (Ε.Ο.Κ)**

Είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν η ταχύτητά του παραμένει σταθερή (σε μέτρο και κατεύθυνση).

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\vec{x} = \vec{u}\cdot\Delta t \quad , \quad \Sigma\vec{F} = 0 \quad , \quad \vec{a} = 0}}$$



● Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση

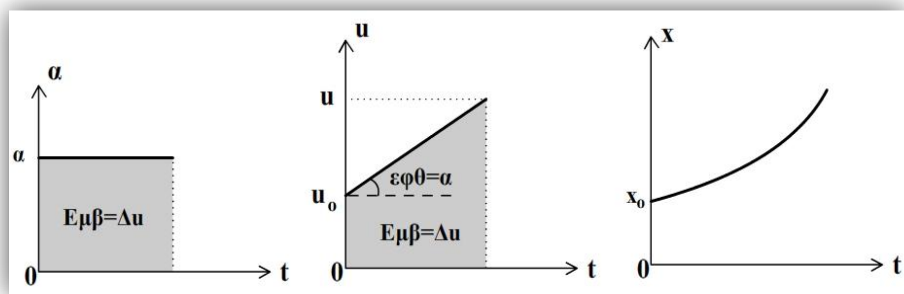
Είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν η ταχύτητά του μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, δηλαδή με σταθερή επιτάχυνση.

$$\boldsymbol{\Delta\vec{x} = \vec{u}_o \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} \cdot \Delta t^2} \quad , \quad \boldsymbol{\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{\alpha} \cdot \Delta t} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}}$$

Η Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση μπορεί να χωριστεί σε δύο κατηγορίες:

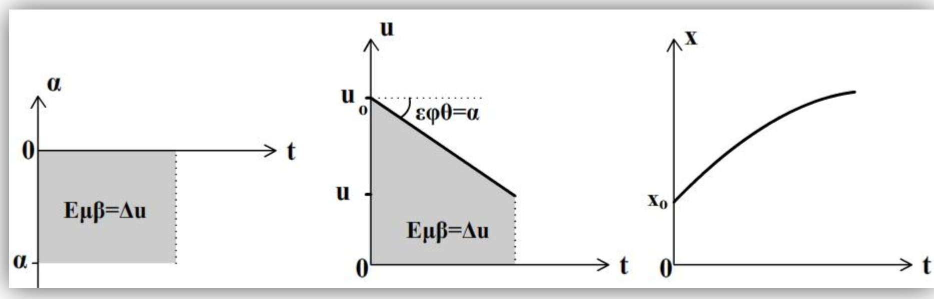
i. Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση όταν:

$\vec{\alpha}$ ομόρροπη της $\vec{u}$, το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.

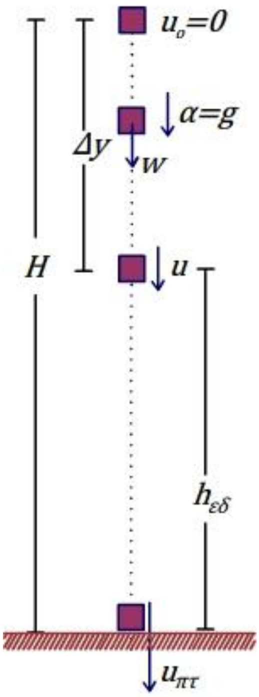


ii. Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση όταν:

$\vec{a}$ αντίρροπη της $\vec{u}$, το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται.



• **Ελεύθερη Πτώση**



Ελεύθερη Πτώση εκτελεί ένα σώμα όταν αφήνεται ελεύθερο από κάποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης σε συνθήκες μηδενικών τριβών. Άρα η μόνη δύναμη που ενεργεί πάνω του είναι το βάρος του.

Από Θεμελιώδη Νόμο του Newton θα έχουμε:

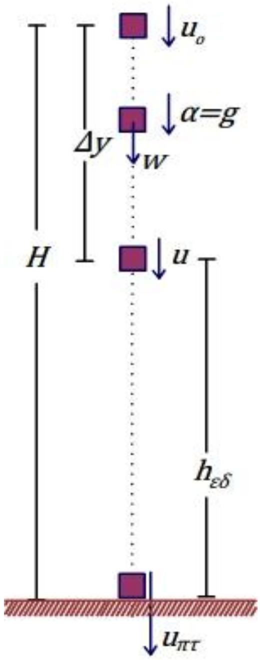
$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{w} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}}$$

Για μία τυχαία θέση θα ισχύει:

$$\boldsymbol{\vec{u} = \vec{g} \cdot \Delta t}$$

$$\boldsymbol{\Delta\vec{y} = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot \Delta t^2}$$

- **Κατακόρυφη βολή προς τα κάτω**



Κατακόρυφη βολή προς τα κάτω εκτελεί ένα σώμα όταν εκτοξεύεται προς τα κάτω από κάποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης σε συνθήκες μηδενικών τριβών. Άρα η μόνη δύναμη που ενεργεί πάνω του είναι το βάρος του.

Από Θεμελιώδη Νόμο του Newton θα έχουμε:

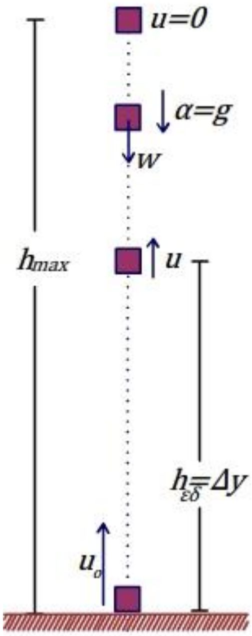
$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{w} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow m\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}}$$

Για μία τυχαία θέση θα ισχύει:

$$\boldsymbol{\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{g}\cdot\Delta t}$$

$$\boldsymbol{\Delta\vec{y} = \vec{u}_o\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot\Delta t^2}$$

- **Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω**



Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω εκτελεί ένα σώμα όταν εκτοξεύεται προς τα πάνω από την επιφάνεια της Γης, ή κοντά σε αυτήν, σε συνθήκες μηδενικών τριβών. Άρα η μόνη δύναμη που ενεργεί πάνω του είναι το βάρος του.

Από Θεμελιώδη Νόμο του Newton θα έχουμε:

$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{w} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow m\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}}$$

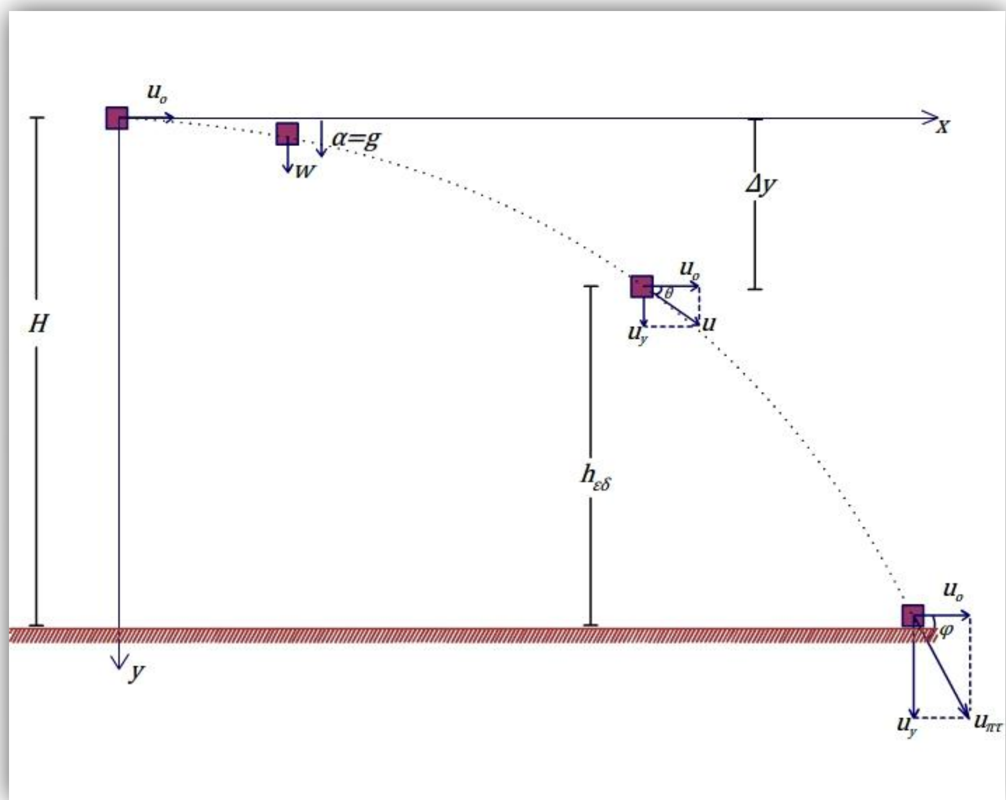
Για μία τυχαία θέση θα ισχύει:

$$\boldsymbol{\vec{u} = \vec{u}_o + \vec{g}\cdot\Delta t \quad ή \quad \vec{u} = \vec{u}_o - |\vec{g}|\cdot\Delta t}$$

$$\boldsymbol{\Delta\vec{y} = \vec{u}_o\cdot\Delta t + \tfrac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot\Delta t^2 \quad ή \quad \Delta\vec{y} = \vec{u}_o\cdot\Delta t - \tfrac{1}{2}\cdot|\vec{g}|\cdot\Delta t^2}$$

- **Οριζόντια Βολή**

Οριζόντια βολή ονομάζεται η κίνηση στην οποία εκτοξεύουμε οριζόντια ένα σώμα από κάποιο ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης σε συνθήκες μηδενικών τριβών.



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η οριζόντια βολή μπορεί να χωριστεί σε δύο κινήσεις οι οποίες πραγματοποιούνται ταυτοχρόνως.

Άξονας x΄x: Στον οριζόντιο άξονα x΄x το σώμα δε δέχεται καμία δύναμη. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα το σώμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στον άξονα αυτόν, άρα:

$\Sigma\vec{F}_x=0$, $\vec{\alpha}_x=0$, $\vec{u}_x=\vec{u}_o=$**σταθ.** , $\Delta\vec{x}=\vec{u}_o\cdot\Delta t$

Άξονας y'y: Στον κατακόρυφο άξονα y'y το σώμα δέχεται μόνο το βάρος του και η αρχική ταχύτητα είναι μηδενική. Συνεπώς στον άξονα αυτόν θα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα:

$\Sigma\vec{F}_y = m\cdot\vec{\alpha}_y$, $\vec{\alpha}_y = \vec{g}$, $\vec{u}_y = \vec{g}\cdot\Delta t$, $\Delta\vec{y} = \frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot\Delta t^2$

Προσοχή, η ταχύτητα υπολογίζεται σε κάθε μία θέση, ως εξής:

Άξονας x'x: $\vec{u}_x = \vec{u}_o$

Άξονας y'y: $\vec{u}_y = \vec{g}\cdot\Delta t$

Ισχύει ότι: $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας θα ισούται με: $|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

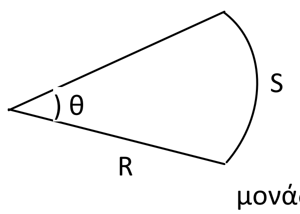
Και η κατεύθυνσή της: εφθ=$\frac{u_y}{u_x}$

Ο χρόνος πτώσης στην οριζόντια βολή **εξαρτάται μόνο από το αρχικό ύψος** και όχι από την αρχική ταχύτητα εκτόξευσης.

- **Ομαλή Κυκλική Κίνηση**

Ομαλή κυκλική κίνηση είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν η τροχιά του είναι περιφέρεια κύκλου και το μέτρο της γραμμικής ή επιτρόχιας ταχύτητάς του παραμένει σταθερό.

Γωνία (θ): Γωνία ονομάζεται η αναλογία μεταξύ μήκους τόξου και ακτίνας.



Τύπος: $\theta = \frac{S}{R} \Rightarrow \boxed{S = \theta\cdot R}$

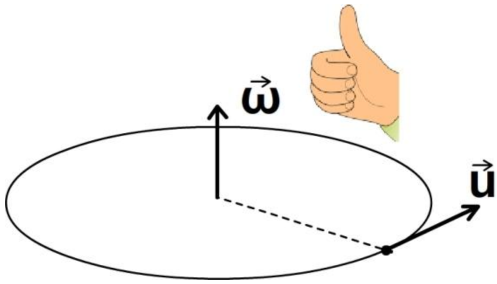
μονάδες γωνίας:1 rad (ακτίνιο) , 1 rad= 360^o

Γραμμική (ή επιτρόχια) ταχύτητα ($u_{γρ}$ ή u)

Προσοχή! Έχει σταθερό μέτρο, αλλά όχι κατεύθυνση. Χαρακτηριστικά:

- διανυσματικό μέγεθος
- κατεύθυνση εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά
- σημείο εφαρμογής το σώμα ή ένα σημείο του σώματος
- μέτρο που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μήκους τόξου.

Τύπος: $\boxed{u = \frac{\Delta S}{\Delta t}}$ **(m/s)**



Γωνιακή ταχύτητα (ω)

Προσοχή! Παραμένει σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση. Χαρακτηριστικά:

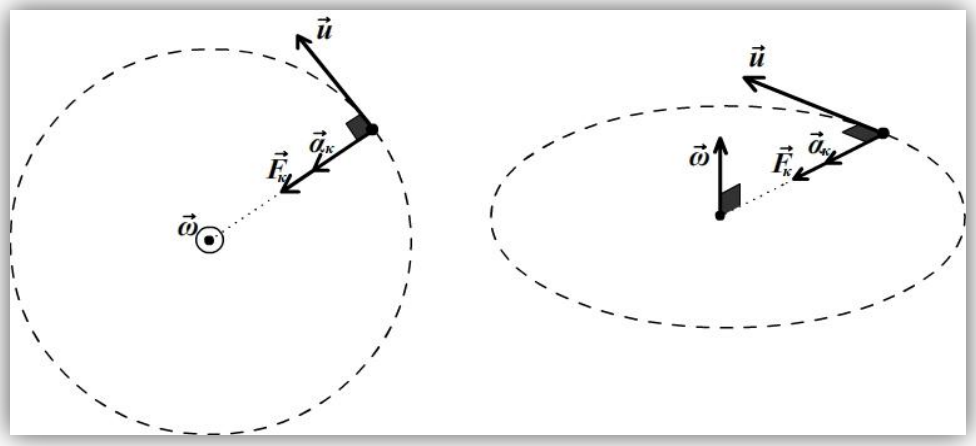
- διανυσματικό μέγεθος
- διεύθυνση αυτή του άξονα περιστροφής
- φορά που προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού χεριού
- σημείο εφαρμογής το σημείο τομής άξονα περιστροφής - επίπεδου τροχιάς
- μέτρο που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της γωνίας.

Τύπος: $\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$ *(rad/s)*

Σε χρόνο μίας περιόδου το σώμα διαγράφει έναν πλήρη κύκλο, άρα για Δt=T θα ισχύει Δθ=2π, οπότε θα έχουμε:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xRightarrow[\Delta\theta=2\pi]{\Delta t=T} \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}}$$

Αν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε $\boldsymbol{T = \frac{1}{f}}$ θα έχουμε $\boxed{\omega = 2\pi f}$



<u>Σχέση Γραμμικής - Γωνιακής Ταχύτητας</u>

$$S=\vartheta \cdot R \;\Rightarrow\; \frac{dS}{dt}=\frac{d(\theta \cdot R)}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dS}{dt}=R\frac{d\theta}{dt} \;\Rightarrow\; \boxed{u=\omega \cdot R}$$

Από τον παραπάνω τύπο φαίνεται ότι ενώ όλα τα σημεία ενός στρεφόμενου στερεού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα η γραμμική τους ταχύτητα εξαρτάται από την ακτίνα τους.

<u>Κεντρομόλος επιτάχυνση</u>

Είναι η επιτάχυνση η οποία στρίβει το σώμα. Σε αυτή οφείλεται η αλλαγή της κατεύθυνσης της ταχύτητας, είναι δηλαδή η υπεύθυνη επιτάχυνση για την κυκλική κίνηση. Προσοχή, η κεντρομόλος επιτάχυνση δεν μπορεί να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητας παρά μόνο την κατεύθυνσή της. Έχει κατεύθυνση κάθετη στη γραμμική ταχύτητα με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Μέτρο κεντρομόλου επιτάχυνσης: $\boxed{\alpha_{\kappa}=\frac{u^2}{R}}$ (m/s^2)

<u>Κεντρομόλος δύναμη (F_K) ή Ακτινική δύναμη (ΣF_R)</u>

Είναι η δύναμη η οποία στρίβει το σώμα. Προσοχή, η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα της ακτίνας και έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Η κεντρομόλος δύναμη είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα, δηλαδή σε κάθε στοιχειώδη μετατόπιση, άρα έχει μηδενικό έργο.

Μέτρο κεντρομόλου δύναμης: $\boldsymbol{F_\kappa = \Sigma F_R = m \cdot \alpha_K \Rightarrow \boxed{F_\kappa = m \cdot \frac{u^2}{R}}}$ (N)

Σύστημα Σωμάτων

Σύστημα σωμάτων ονομάζεται το σύνολο δύο ή περισσότερων σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (με δυνάμεις).

Εσωτερικές θεωρούνται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος (Είναι όλες ζεύγη δράσης και αντίδρασης, άρα έχουν μηδενική συνισταμένη).

Εξωτερικές θεωρούνται οι δυνάμεις που ασκούνται από σώματα εκτός συστήματος στα σώματα του συστήματος.

Μονωμένο σύστημα λέγεται αυτό στο οποίο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική.

Αρχή Διατήρησης Ορμής (Α.Δ.Ο.)

Σε κάθε μονωμένο σύστημα σωμάτων η συνολική ορμή παραμένει σταθερή. Αυτό φαίνεται και από τη γενίκευση του θεμελιώδους νόμου της Μηχανικής:

$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}}} \quad \textbf{(Α.Δ.Ο.)}$$

Κρούσεις

Κρούση ονομάζεται η σύγκρουση δύο σωμάτων που κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο.

Η κρούση έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ισχύει η αρχή διατήρησης ορμής (**Α.Δ.Ο.**) εφόσον δεν υπάρχει ακλόνητα στερεωμένο σώμα.

- Έχει αμελητέα χρονική διάρκεια (έτσι, και τριβές με το δάπεδο να εμφανίζονται, μπορούμε να τις αγνοήσουμε για τη μικρή διάρκεια μίας κρούσης και να θεωρήσουμε το σύστημα μονωμένο)

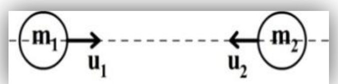
- Κατά τη διάρκεια της επαφής αναπτύσσονται πολύ ισχυρές δυνάμεις με αποτέλεσμα η κινητική κατάσταση των σωμάτων να μεταβάλλεται απότομα

Στην ατομική και πυρηνική Φυσική (μικρόκοσμος) η έννοια της κρούσης επεκτείνεται και ονομάζουμε κρούση οποιοδήποτε φαινόμενο του μικρόκοσμου στο οποίο τα σωματίδια αλληλεπιδρούν για πολύ μικρό χρονικό διάστημα με πολύ μεγάλες δυνάμεις. Το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται και ***σκέδαση****. Στη σκέδαση τα σωματίδια δεν έρχονται σε επαφή μεταξύ τους, απλά πλησιάζουν πάρα πολύ. Όλες οι σκεδάσεις είναι ελαστικές.*

<u>Διαχωρισμός Κρούσεων ανάλογα με τη διεύθυνση κίνησης των συγκρουόμενων σωματιδίων πριν την κρούση</u>

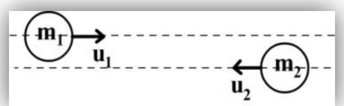
Κεντρική ή Μετωπική

Οι φορείς των ταχυτήτων των κέντρων μάζας περνούν από την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας.



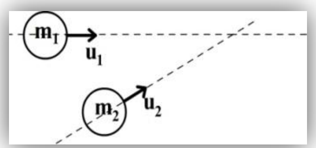
Έκκεντρη

Οι φορείς των ταχυτήτων των κέντρων μάζας είναι παράλληλοι και δεν περνούν από την ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας.



Πλάγια

Οι φορείς των ταχυτήτων των κέντρων μάζας σχηματίζουν κάποια τυχαία γωνία.



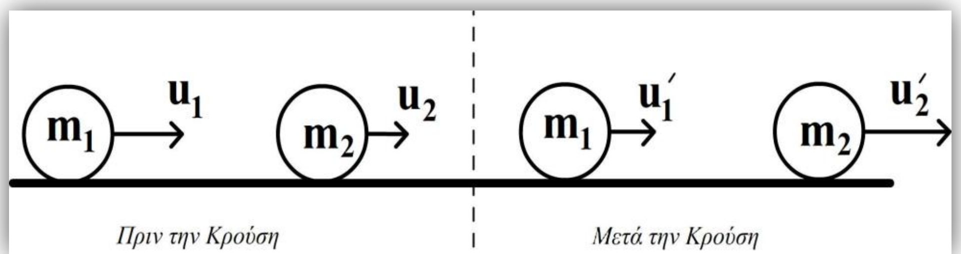
Διαχωρισμός Κρούσεων ανάλογα με τη διατήρηση της Κινητικής Ενέργειας των συγκρουόμενων σωμάτων

Ελαστική Κρούση	Ανελαστική Κρούση
• Δεν υπάρχει μόνιμη παραμόρφωση • Δεν υπάρχουν απώλειες Ενέργειας $\mathbf{E_{\alpha\pi}=0}$ • Ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας $K_{\text{ολ,αρχ}} = K_{\text{ολ,τελ}}$	• Υπάρχει μόνιμη παραμόρφωση •Υπάρχουν απώλειες Ενέργειας $K_{\text{ολ,αρχ}} > K_{\text{ολ,τελ}}$ • Η Ενέργεια Απωλειών ισούται με: $E_{\alpha\pi}=K_{\text{ολ,αρχ}}-K_{\text{ολ,τελ}}$ *Υποκατηγορία των ανελαστικών κρούσεων είναι οι* ***πλαστικές κρούσεις*** *στις οποίες δημιουργείται συσσωμάτωμα.*

Ασχολούμαστε μόνο με την Κινητική Ενέργεια διότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και έτσι τα σώματα δε μετακινούνται και δεν αλλάζουν οι Δυναμικές Ενέργειες.

Ανάλυση Κεντρικής Ελαστικής Κρούσης

Έστω δύο σώματα m_1 και m_2 τα οποία κινούνται με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.



Για τις ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση ισχύουν οι τύποι:

$\boldsymbol{u_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}u_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1}$
$\boldsymbol{u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}u_2}$

Προσοχή, στους παραπάνω τύπους οι ταχύτητες αντικαθίστανται με τα πρόσημά τους (αλγεβρικές τιμές) και τα αποτελέσματα προκύπτουν με τα πρόσημά τους επίσης.

Απόδειξη των παραπάνω τύπων:

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο. για την κρούση

$p_{ολ,αρχ}=p_{ολ,τελ} \Rightarrow \quad p_1+p_2=p_1'+p_2' \Rightarrow m_1u_1+m_2u_2=m_1u_1'+m_2u_2' \Rightarrow m_1u_1- m_1u_1'= m_2u_2'- m_2u_2 \Rightarrow$

$m_1(u_1- u_1')= m_2(u_2'- u_2) \quad (1)$

Εφαρμόζουμε επίσης Αρχή Διατήρησης Κινητικής Ενέργειας (Α.Δ.Κ.Ε.)

$K_{ολ,αρχ}=K_{ολ,τελ} \Rightarrow K_1+K_2=K_1'+K_2' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1u_1^2+ \frac{1}{2} m_2u_2^2 =\frac{1}{2} m_1u'^2_1+ \frac{1}{2} m_2u'^2_2 \Rightarrow$

$m_1 u_1^2 - m_1u'^2_1= m_2u'^2_2 - m_2u_2^2 \Rightarrow m_1(u_1^2 - u'^2_1)= m_2(u'^2_2 - u_2^2) \Rightarrow$

$m_1(u_1 - u'_1) (u_1 + u'_1)= m_2(u'_2 - u_2) (u'_2 +u_2) \quad (2)$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη προκύπτει:

$u_1+ u'_1= u_2+ u'_2 \quad (3)$

Λύνοντας τελικά το σύστημα των (1) και (3) προκύπτουν οι τύποι των ταχυτήτων u_1' και u_2'.

Ειδικές περιπτώσεις - Διερεύνηση των τύπων u_1' και u_2'

• Αν το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο, δηλαδή $u_2=0$:

$\boldsymbol{u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1}$ και $\boldsymbol{u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1}$

• Αν οι μάζες των συγκρουόμενων σωμάτων είναι ίσες, δηλαδή $m_1=m_2=m$:

$$\boldsymbol{u_1' = \frac{2m}{m+m}u_2 + \frac{m-m}{m+m}u_1 \Rightarrow \; u_1' = u_2}$$

$$\boldsymbol{u_2' = \frac{2m}{m+m}u_1 + \frac{m-m}{m+m}u_2 \Rightarrow \; u_2' = u_1}$$

Τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες.

• Αν το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο (**m_2 με $u_2=0$**) και το άλλο σώμα που κινείται έχει πολύ **μεγαλύτερη** μάζα **($m_1>>m_2$)**:

π.χ. Ένα κινούμενο αυτοκίνητο (m_1) χτυπά ελαστικά μία ακίνητη μπάλα (m_2).

$$\boldsymbol{u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \Rightarrow u_1' = \frac{m_1}{m_1}u_1 \Rightarrow \; u_1' = u_1}$$

$$\boldsymbol{u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 \Rightarrow u_2' = \frac{2m_1}{m_1}u_1 \Rightarrow \; u_2' = 2u_1}$$

Το σώμα m_1 δεν επηρεάζεται και το σώμα m_2 εκτοξεύεται με διπλάσια ταχύτητα από αυτή του σώματος m_1.

• Αν το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο (**m_2 με $u_2=0$**) και το άλλο σώμα που κινείται έχει πολύ **μικρότερη** μάζα **($m_1<<m_2$)**:

π.χ. Μία κινούμενη μπάλα (m_1) χτυπά ελαστικά ένα ακίνητο αυτοκίνητο(m_2).

$$\boldsymbol{u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \Rightarrow u_1' = \frac{-m_2}{m_2}u_1 \Rightarrow \; u_1' = -u_1}$$

$$\boldsymbol{u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 \Rightarrow u_2' = \frac{2m_1}{m_2}u_1 \Rightarrow \; u_2' = 0}$$

Το σώμα m_1 ανακλάται με αντίθετη ταχύτητα από την αρχική και το σώμα m_2 παραμένει ακίνητο.

<u>Παρατηρήσεις Ελαστικής Κρούσης:</u>

• **$\Delta p_1=-\Delta p_2$** *(Ανεπίσημο)*

Απόδειξη: Από Α.Δ.Ο. $p_{ολ,αρχ}=p_{ολ,τελ} \Rightarrow p_1 + p_2 = \boldsymbol{p_1'} + \boldsymbol{p_2'} \Rightarrow p_1 - \boldsymbol{p_1'} = \boldsymbol{p_2'} - p_2$ $\Rightarrow$ **$\Delta p_1=-\Delta p_2$**

• **$\Delta K_1=-\Delta K_2$** *(Ανεπίσημο)*

Απόδειξη: Από Α.Δ.Κ.Ε. $K_{ολ,αρχ}=K_{ολ,τελ} \Rightarrow K_1+K_2=\boldsymbol{K_1'}+\boldsymbol{K_2'} \Rightarrow$

$$K_1 - \boldsymbol{K_1'} = \boldsymbol{K_2'} - K_2 \Rightarrow \Delta K_1=-\Delta K_2$$

• ***Για ένα σώμα μπορεί να ισχύει ότι ΔΚ=0 αλλά Δp≠0***

Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου ένα κινούμενο σώμα (m_1) συγκρούεται με ένα ακίνητο σώμα (m_2 με u_2=0) πολύ μεγαλύτερης μάζας ($m_1 << m_2$).

Αποδείξαμε ότι ισχύει $\boldsymbol{u_1' = -u_1}$

$\mathbf{\Delta K = K_1' - K_1 = 0}$ *και*

$\mathbf{\Delta p = p_1' - p_1 = m_1 u_1' - m_1 u_1 = m_1(-u_1) - m_1 u_1 = -m_1 u_1 - m_1 u_1 = -2p_1}$

• ***Μέση δύναμη σε κρούση (αν δίνεται η χρονική διάρκεια)***

Η μέση συνισταμένη δύναμη σε κρούση υπολογίζεται μέσω της γενίκευσης του θεμελιώδους Νόμου της Μηχανικής, δηλαδή:

$$\boxed{\Sigma F_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \frac{\Delta p}{\Delta t}}$$

• ***Ποσοστό Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας ενός σώματος***

$$\boxed{\Delta K\% = \frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\% = \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\%}$$

• ***Μέγιστη Δυναμική Ενέργεια προσωρινής ελαστικής παραμόρφωσης σωμάτων***

Στη μικρή διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης δύο σωμάτων αυτά παραμορφώνονται προσωρινά (σαν να είναι δεμένα με ελατήριο). Η παραμόρφωση αυτή είναι μέγιστη όταν οι ταχύτητές τους γίνουν ίσες κατά μέτρο και κατεύθυνση. Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. έχουμε:

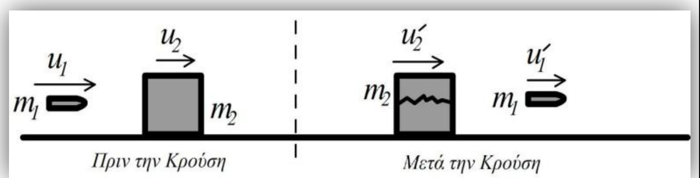
$p_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = p_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u + m_2 u \Rightarrow u = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$

Από Α.Δ.Μ.Ε. $K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + E_{\pi\alpha\rho} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + E_{\pi\alpha\rho}$

Στο τέλος της κρούσης η ενέργεια αυτή ξαναδίνεται στα σώματα ως Κινητική ώστε να ισχύει: $K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$

Ανάλυση Ανελαστικής , Πλαστικής Κεντρικής Κρούσης και Έκρηξης

Ανελαστική Κρούση



Ισχύουν:

- **Α.Δ.Ο.**

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

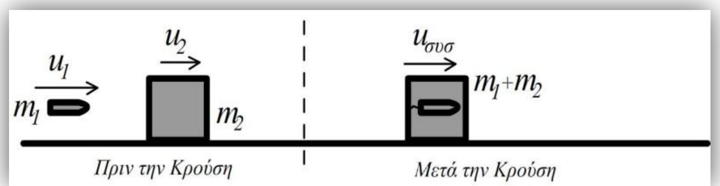
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

- **Α.Δ.Ε.**

$E_{απωλειων} = K_{ολ,αρχ} - K_{ολ,τελ} \Rightarrow$

$E_{απωλειων} = K_1 + K_2 - K'_1 - K'_2$

Πλαστική Κρούση



Ισχύουν:

- **Α.Δ.Ο.**

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{συσ}$$

- **Α.Δ.Ε.**

$E_{απωλειων} = K_{ολ,αρχ} - K_{ολ,τελ} \Rightarrow$

$E_{απωλειων} = K_1 + K_2 - K_{συσ}$

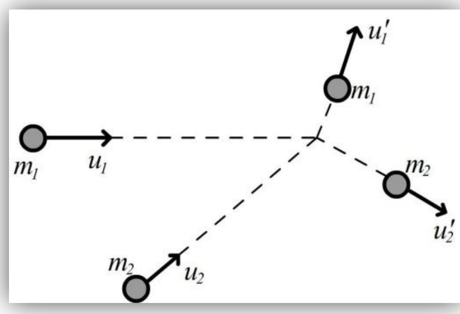
Έκρηξη

Μία άλλη περίπτωση εφαρμογής της Α.Δ.Ο. είναι η **έκρηξη** στην οποία ένα σώμα σπάει σε άλλα μικρότερα λόγω κάποιας εσωτερικής διεργασίας. Στην έκρηξη ισχύουν τα εξής:

- Α.Δ.Ο. $\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow \vec{p}_{συσ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots$
- Α.Δ.Ε. $E_{απελευθερώνεται} = K_{ολ,τελ} - K_{ολ,αρχ}$

Ανάλυση Πλάγιας Κρούσης

Πλάγια Ελαστική Κρούση



Ισχύουν:

- **Α.Δ.Κ.Ε. :** $K_{ολ,αρχ}=K_{ολ,τελ}$
- **Α.Δ.Ο. κατά άξονες**:

$$\vec{p}_{ολ,αρχ}=\vec{p}_{ολ,τελ}\Rightarrow$$

x'x: $\vec{p}_{(x)ολ,αρχ}=\vec{p}_{(x)ολ,τελ}$

y'y: $\vec{p}_{(y)ολ,αρχ}=\vec{p}_{(y)ολ,τελ}$

Επίσης ισχύουν για τα μέτρα:

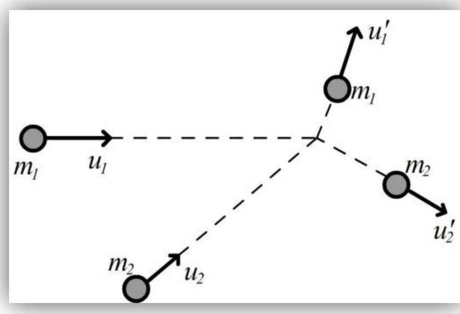
$$|p_{ολ,αρχ}|=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2p_1p_2συνθ} \quad \text{και}$$

$$|p_{ολ,τελ}|=\sqrt{P'^2_1+P'^2_2+2p'_1p'_2συνφ}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ p_1 και p_2 και φ η γωνία μεταξύ p_1' και p_2' και λόγω της Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{ολ,αρχ}=\vec{p}_{ολ,τελ}\Rightarrow |p_{ολ,αρχ}|=|p_{ολ,τελ}|$$

Πλάγια Ανελαστική Κρούση



Ισχύουν:

- **Α.Δ.Ε. :** $E_{απωλειων}=K_{ολ,αρχ}-K_{ολ,τελ}\Rightarrow$

  $E_{απωλειων}=K_1+K_2-K_1'-K_2'$
- **Α.Δ.Ο. κατά άξονες**: $\vec{p}_{ολ,αρχ}=\vec{p}_{ολ,τελ}\Rightarrow$

x'x: $\vec{p}_{(x)ολ,αρχ}=\vec{p}_{(x)ολ,τελ}$

y'y: $\vec{p}_{(y)ολ,αρχ}=\vec{p}_{(y)ολ,τελ}$

Επίσης ισχύουν για τα μέτρα:

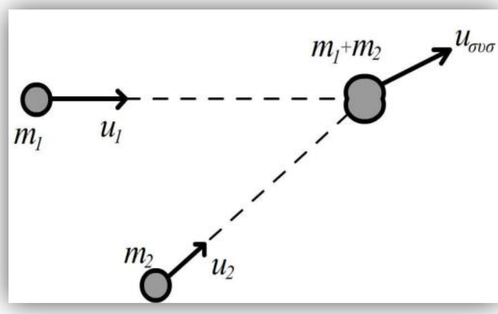
$|\,\boldsymbol{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi}| = \sqrt{\boldsymbol{P_1^2 + P_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu\theta}}$ **και**

$|\boldsymbol{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}| = \sqrt{\boldsymbol{P'^2_1 + P'^2_2 + 2p'_1p'_2\sigma\upsilon\nu\varphi}}$

όπου θ η γωνία μεταξύ p_1 και p_2 και λόγω της Α.Δ.Ο.

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{\boldsymbol{p}}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow |\,\boldsymbol{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi}| = |\boldsymbol{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}|$$

Πλάγια Πλαστική Κρούση



Ισχύουν:

- Α.Δ.Ε. : $E_{\alpha\pi\omega\lambda\varepsilon\iota\omega\nu} = K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} - K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

  $E_{\alpha\pi\omega\lambda\varepsilon\iota\omega\nu} = K_1 + K_2 - K_{\sigma\upsilon\sigma}$
- Α.Δ.Ο. κατά άξονες: $\vec{\boldsymbol{p}}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{\boldsymbol{p}}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

  x'x: $\vec{\boldsymbol{p}}_{(x)o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{\boldsymbol{p}}_{(x)o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$

  y'y: $\vec{\boldsymbol{p}}_{(y)o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{\boldsymbol{p}}_{(y)o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}$

Επίσης ισχύουν για τα μέτρα:

$|\,\boldsymbol{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi}| = \sqrt{\boldsymbol{P_1^2 + P_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu\theta}}$ **και**

$|\boldsymbol{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}| = \boldsymbol{(m_1+m_2)u_{\sigma\upsilon\sigma}}$

όπου θ η γωνία μεταξύ p_1 και p_2 και λόγω της Α.Δ.Ο.

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = \vec{\boldsymbol{p}}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow |\,\boldsymbol{p}_{o\lambda,\alpha\rho\chi}| = |\boldsymbol{p}_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}|$$

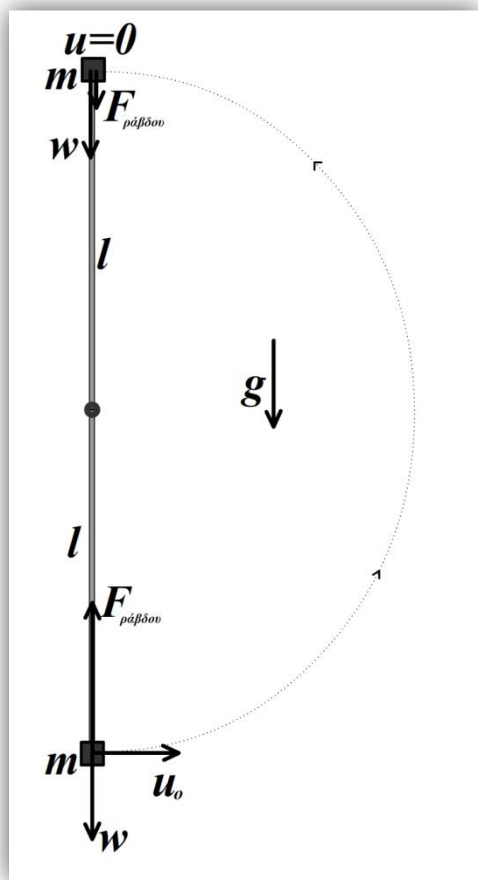
Ασφαλής Ανακύκλωση

Ανακύκλωση στη φυσική ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων διαγράφει πλήρες κατακόρυφο κύκλο. Είναι απολύτως λογικό ότι αν το σύστημα το οποίο μελετάμε καταφέρει να περάσει την πάνω κατακόρυφη θέση θα πετύχει τη ζητούμενη ανακύκλωση. Ας ονομάζουμε λοιπόν την πάνω κατακόρυφη θέση επικίνδυνη.

Ας δούμε μερικές περιπτώσεις.

<u>Σημειακό σώμα κολλημένο στο άκρο αβαρούς ράβδου:</u>

Για να εκτελέσει το σύστημα αυτό ανακύκλωση πρέπει να έχει κάποια ταχύτητα στην επικίνδυνη θέση. Οριακά, αν αυτή η ταχύτητα γίνει ακόμη και μηδέν, το σύστημα θα καταφέρει να εκτελέσει ανακύκλωση.



Έστω ότι εκτοξεύσαμε το σύστημα αβαρής ράβδος-σώμα από την κάτω κατακόρυφη θέση δίνοντας στο σώμα m μία αρχική οριζόντια ταχύτητα u_o. Ψάχνουμε την ελάχιστη ταχύτητα u_o ώστε το σύστημα να εκτελέσει ανακύκλωση.

Για να εκτελέσει λοιπόν οριακά ανακύκλωση αρκεί να φτάσει στην πάνω κατακόρυφη θέση. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. (θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και την Α.Δ.Μ.Ε.) από την κάτω κατακόρυφη έως την πάνω κατακόρυφη θέση, όπου η κινητική ενέργεια θα είναι μηδέν. Η δύναμη της αβαρούς ράβδου στο σώμα θα έχει μηδενικό έργο διότι παραμένει συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα του σώματος.

Οπότε θα έχουμε:

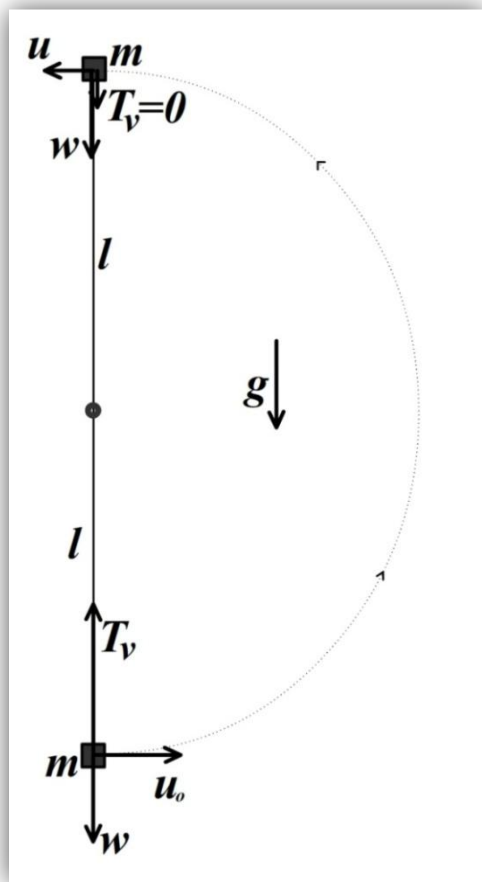
$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{Fραβδου} + W_w \Rightarrow -K_{αρχ} = W_w$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot m \cdot u_o^2 = -m \cdot g \cdot 2 \cdot l \Rightarrow u_o = 2\sqrt{g \cdot l}$$

<u>Σημειακό σώμα δεμένο στο άκρο τεντωμένου, αβαρούς και μη εκτατού νήματος:</u>

Για να εκτελέσει το σύστημα αυτό ανακύκλωση πρέπει το νήμα να διατηρηθεί τεντωμένο σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Γνωρίζουμε όμως ότι τεντωμένο νήμα ασκεί τάσεις στα άκρα του. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $T_ν \geq 0$. Η πάνω κατακόρυφη θέση είναι η επικίνδυνη. Θέλουμε εκεί $T_ν \geq 0$ και αν δουλέψουμε οριακά μπορούμε να μηδενίσουμε την τάση στη θέση αυτήν.

Έστω ότι εκτοξεύσαμε το σύστημα νήμα-σώμα από την κάτω κατακόρυφη θέση δίνοντας στο σώμα m μία αρχική οριζόντια ταχύτητα u_o. Ψάχνουμε την ελάχιστη ταχύτητα u_o ώστε το σύστημα να εκτελέσει ανακύκλωση.



Στην πάνω θέση η κεντρομόλος δύναμη θα ισούται με:

$$F_K = w + T_ν$$

Είπαμε ότι οριακά μπορούμε να μηδενίσουμε την τάση ($T_ν=0$), άρα:

$$F_K = w \Rightarrow m \cdot \frac{u^2}{l} = m \cdot g \Rightarrow u = \sqrt{g \cdot l}$$

Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. (θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και την Α.Δ.Μ.Ε.) από την κάτω κατακόρυφη έως την πάνω κατακόρυφη θέση. Η τάση του νήματος στο σώμα θα έχει μηδενικό έργο διότι παραμένει συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα του σώματος.

Οπότε θα έχουμε:

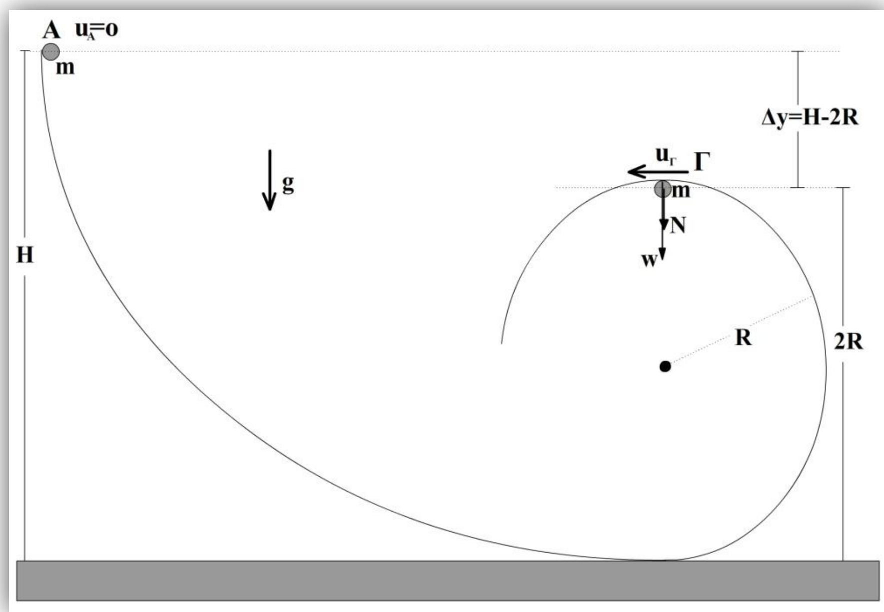
$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{Tν} + W_w \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot u^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_o^2 = -m\cdot g\cdot 2\cdot l \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot \sqrt{g\cdot l}^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_o^2 = -m\cdot g\cdot 2\cdot l \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot l - \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_o^2 = -m\cdot g\cdot 2\cdot l \Rightarrow g\cdot l - u_o^2 = -g\cdot 4\cdot l \Rightarrow u_o^2 = g\cdot 5\cdot l \Rightarrow u_o = \sqrt{5\cdot g\cdot l}$$

<u>Σημειακό σώμα σε λείο κατακόρυφο κυκλικό οδηγό</u>

Για να εκτελέσει το σώμα αυτό ανακύκλωση πρέπει να διατηρεί συνεχώς την επαφή με τον κυκλικό οδηγό, άρα να υπάρχει δύναμη επαφής με τον οδηγό. Θέλουμε λοιπόν N$\geq$ 0 και οριακά στην πάνω κατακόρυφη θέση N=0.

Έστω ότι αφήσαμε το σώμα ελεύθερο από κάποιο ύψος H από την επιφάνειας του εδάφους και ψάχνουμε το ελάχιστο ύψος H ώστε να εκτελέσει ανακύκλωση.



Στην πάνω κατακόρυφη θέση (επικίνδυνη) η κεντρομόλος δύναμη, που είναι η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα της ακτίνας ισούται με:

$$F_K = w + N$$

Είπαμε ότι δουλεύοντας οριακά μπορούμε να μηδενίσουμε τη δύναμη επαφής, άρα για N=0 θα έχουμε:

$$F_K = w \Rightarrow m \cdot \frac{u^2}{R} = m \cdot g \Rightarrow u_\Gamma = \sqrt{g \cdot R}$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. (θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και την Α.Δ.Μ.Ε.) από τη θέση Α έως τη θέση Γ θα έχουμε:

$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_N + W_w \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_\Gamma^2 = m \cdot g \cdot (H - 2 \cdot R) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{g \cdot R}^2 = m \cdot g \cdot (H - 2 \cdot R)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot R = g \cdot H - g \cdot 2 \cdot R \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot R = H - 2 \cdot R \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot R = H - 2 \cdot R$$

$$\Rightarrow H = 2{,}5 \cdot R$$

Διανύσματα

Τα περισσότερα μεγέθη στη φυσική είναι διανυσματικά, ας ασχοληθούμε με την ορμή σαν παράδειγμα. Θα μπορούσε στη θέση της ορμής να ήταν η ταχύτητα ή κάποια δύναμη ή οποιοδήποτε διανυσματικό μέγεθος.

Μεταβολή μέτρου Ορμής:

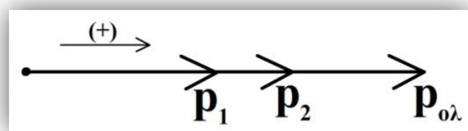
Η μεταβολή του μέτρου της ορμής δεν έχει διανυσματικό χαρακτήρα, είναι η απλή αφαίρεση δύο αριθμών.

$$\Delta|\vec{p}| = |\vec{p}_{τελ}| - |\vec{p}_{αρχ}|$$

Για παράδειγμα στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει διαρκώς σταθερό. Έτσι και το μέτρο της ορμής παραμένει συνεχώς σταθερό. Γι αυτό και πάντα στην ομαλή κυκλική κίνηση η μεταβολή του μέτρου της ορμής είναι μηδέν.

Άθροισμα συγγραμμικών Διανυσμάτων. Γίνεται αλγεβρικά.

Ομόρροπα

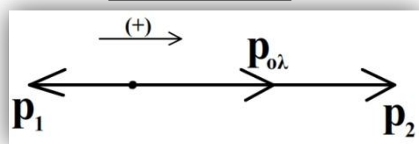


$$\vec{p}_{o\lambda} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \overset{\pi.\chi.}{\Longrightarrow}$$

$$\vec{p}_{o\lambda} = 3 + 5 \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{o\lambda} = 8kg \cdot m/s$$

Αντίρροπα

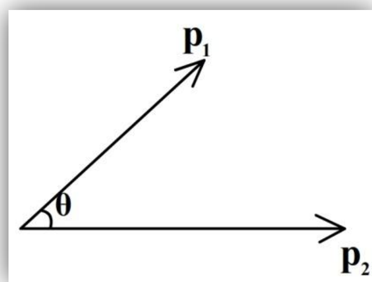


$$\vec{p}_{o\lambda} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \overset{\pi.\chi.}{\Longrightarrow}$$

$$\vec{p}_{o\lambda} = -2 + 6 \Rightarrow$$

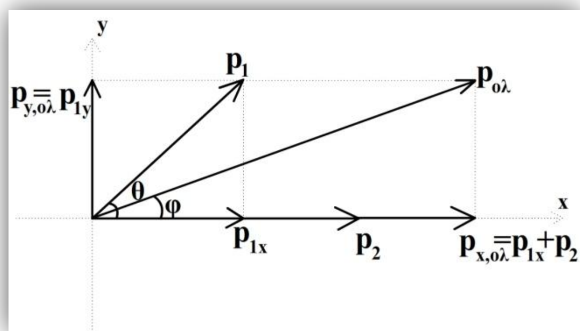
$$\vec{p}_{o\lambda} = 4kg \cdot m/s$$

Άθροισμα μη συγγραμμικών Διανυσμάτων: Γίνεται μόνο διανυσματικά.



Έστω ότι θέλουμε να αθροίσουμε τις διπλανές ορμές. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο ένας είναι να αναλύσουμε τις ορμές σε άξονες, να βρούμε τη συνολική ορμή του κάθε άξονα και να βρούμε μετά τη συνολική ορμή. Ο άλλος γίνεται με τον τύπο αθροίσματος διανυσμάτων.

Ά τρόπος: Ανάλυση ορμών σε άξονες x και y



Άξονας χ:

$$\vec{p}_{x,o\lambda} = \vec{p}_{1,x} + \vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$p_{x,o\lambda} = p_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + p_2$$

Άξονας y:

$$\vec{p}_{y,o\lambda} = \vec{p}_{1,y} \Rightarrow$$

$$p_{y,o\lambda} = p_1 \cdot \eta\mu\theta$$

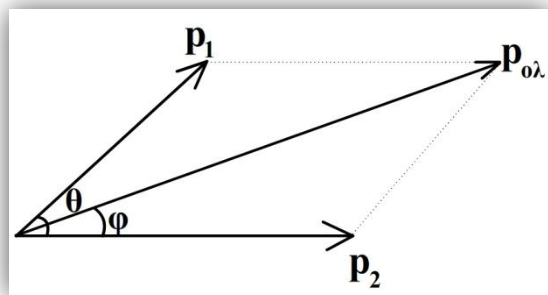
Αφού υπολογίσουμε τις συνολικές ορμές στους άξονες x και y μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική ορμή.

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_{x,ολ} + \vec{p}_{y,ολ}$$

Μέτρο: $|p_{ολ}| = \sqrt{p_{x,ολ}^2 + p_{y,ολ}^2}$

Κατεύθυνση: $εφφ = \frac{p_{y,ολ}}{p_{x,ολ}}$

΄Β τρόπος: Με κανόνα παραλληλογράμμου και τύπο



Για την ολική ορμή ισχύει ότι:

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Με μέτρο:

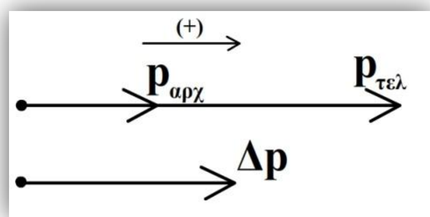
$$|\,p_{ολ}| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2p_1p_2συνθ}$$

Και κατεύθυνση:

$$εφφ = \frac{p_1 \cdot ημθ}{p_2 + p_1 \cdot συνθ}$$

<u>Αφαίρεση συγγραμμικών διανυσμάτων . Γίνεται αλγεβρικά. Ένα κλασσικό παράδειγμα αφαίρεσης διανυσμάτων είναι ο υπολογισμός της μεταβολής ορμής.</u>

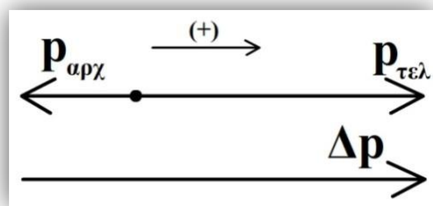
Ομόρροπα



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \overset{π.χ.}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta\vec{p} = 6 - 2 = 4kg \cdot m/s$$

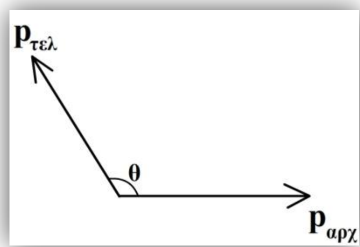
Αντίρροπα



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \overset{π.χ.}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta\vec{p} = 7 - (-2) = 9kg \cdot m/s$$

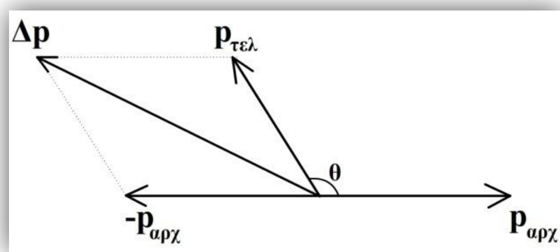
Αφαίρεση μη συγγραμμικών διανυσμάτων. Γίνεται διανυσματικά.



Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη διπλανή μεταβολή της ορμής. Αυτό γίνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} + (-\vec{p}_{αρχ})}$$

Έπειτα σχεδιάζοντας τα διανύσματα από κοινή αρχή εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.



Για το μέτρο μεταβολής της ορμής θα ισχύει:

$$\boldsymbol{|\Delta p| = \sqrt{P_{αρχ}^2 + P_{τελ}^2 + 2p_{αρχ}p_{τελ}συν(\pi - \theta)}}$$

Ισχύς – Ενεργειακοί Ρυθμοί

Σύμβολο: P

Μονάδες: W (1Watt=1J/s)

Η ισχύς είναι το μονόμετρο μέγεθος που εκφράζει το ρυθμό προσφοράς, κατανάλωσης… έργου ή κάποιας μορφής ενέργεια.

Γενικά: $Ισχύς = \frac{έργο}{χρόνος}$ ή $Ισχύς = \frac{μεταβολή\ ενέργειας}{χρόνος}$

$$\boldsymbol{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}} \quad \textbf{ή} \quad \boldsymbol{P = \frac{\Delta Ενέργειας}{\Delta t}}$$

<u>Στιγμιαία ισχύς δύναμης</u>

$$\boldsymbol{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{|F|\cdot|\Delta x|\cdot συνθ}{\Delta t} \Rightarrow P = |F|\cdot|u|\cdot συνθ}$$

Όπου ϑ η γωνία της δύναμης με τη στιγμιαία ταχύτητα

<u>Μέση ισχύς δύναμης</u>

$$\boldsymbol{\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

Εδώ κάνουμε κανονικά τη διαίρεση αφού υπολογίσουμε το έργο της δύναμης με την ισχύ της οποίας ασχολούμαστε.

<u>Ρυθμός μεταβολής Κινητικής Ενέργειας</u>

$$\boldsymbol{\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{W_{ολ}}{\Delta t} = \frac{W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \frac{|\Sigma F|\cdot|\Delta x|\cdot συνθ}{\Delta t} = |\Sigma F|\cdot|u|\cdot συνθ}$$

Όπου ϑ η γωνία της συνισταμένης δύναμης με τη στιγμιαία ταχύτητα

<u>Ρυθμός μεταβολής Δυναμικής Βαρυτικής Ενέργειας</u>

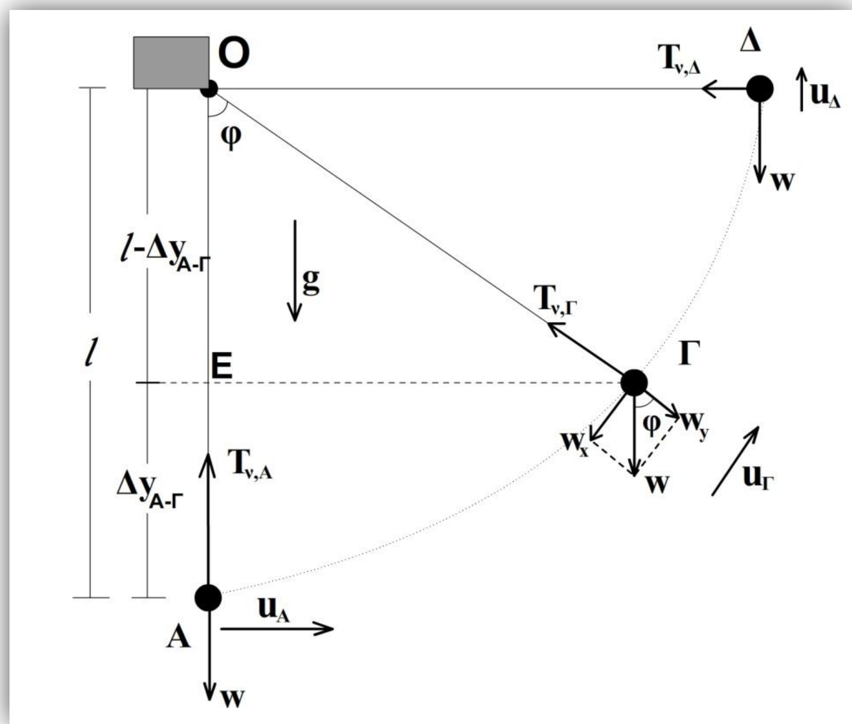
$$\boldsymbol{\frac{\Delta U_B}{\Delta t} = \frac{-W_w}{\Delta t} = \frac{-\pm|m\cdot g\cdot \Delta y|}{\Delta t} = \pm|m\cdot g\cdot u_y|}$$

+ βάζουμε όταν η δυναμική βαρυτική ενέργεια αυξάνεται, άρα στην άνοδο σώματος

- βάζουμε όταν η δυναμική βαρυτική ενέργεια ελαττώνεται, άρα στην κάθοδο σώματος

<u>Εφαρμογή: Υπολογισμός τάσης νήματος σε κατακόρυφη κίνηση</u>

Έστω ότι εκτοξεύσαμε το σώμα από την κάτω κατακόρυφη θέση και θέλουμε να υπολογίσουμε την τάση του νήματος στη θέση αυτή (Α), σε κάποια ενδιάμεση θέση (Γ) και στην οριζόντια θέση (Δ). Σε όλες τις θέσεις αυτές η τάση του νήματος θα υπολογιστεί μέσω την κεντρομόλου. Η ταχύτητα της θέσης Α θεωρείται γνωστή.



<u>Θέση Α:</u>

$\boldsymbol{ΣF_R=F_K \Rightarrow\ T_{ν,A} - w = \frac{m\cdot u_A^2}{l}\ \Rightarrow\ T_{ν,A} = \frac{m\cdot u_A^2}{l} + m\cdot g}$

<u>Θέση Γ:</u>

Πρώτον από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΓ μπορούμε να υπολογίσουμε την κατακόρυφη απόσταση των θέσεων Α και Γ:

$$\boldsymbol{συνφ = \frac{l - Δy_{A-Γ}}{l}\ \Rightarrow Δy_{A-Γ} = \ldots}$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα της θέσης Γ. Αυτό θα γίνει εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. (ή το Α.Δ.Μ.Ε.) από τη θέση Α έως τη Γ:

$\boldsymbol{ΔK=W_{ολ}\ \Rightarrow\ K_{τελ}\text{-}K_{αρχ}=W_{Tν}+W_w \Rightarrow K_{τελ}\text{-}K_{αρχ}= W_w}$

$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_Γ^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_A^2 = -m\cdot g\cdot Δy_{A-Γ}\ \Rightarrow u_Γ = \ldots}$

Έπειτα ασχολούμαστε με τον άξονα της ακτίνας:

$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow \ T_{\nu,\Gamma} - w_y = \frac{m \cdot u_\Gamma^2}{l} \ \Rightarrow T_{\nu,\Gamma} = \frac{m \cdot u_\Gamma^2}{l} + m \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

<u>Θέση Δ:</u>

Πρώτον πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα της θέσης Γ. Αυτό θα γίνει εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. (ή το Α.Δ.Μ.Ε.) από τη θέση Α έως τη Δ:

$\Delta K = W_{o\lambda} \ \Rightarrow \ K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{T\nu} + W_w \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_\Delta^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_A^2 = -m \cdot g \cdot \Delta y_{A-\Delta}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_\Delta^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_A^2 = -m \cdot g \cdot l \Rightarrow \ u_\Delta = \ldots$

Έπειτα ασχολούμαστε με τον άξονα της ακτίνας:

$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow \ T_{\nu,\Delta} = \frac{m \cdot u_\Delta^2}{l}$

Ένα σωστά προσδιορισμένο πρόβλημα, έχει λυθεί κατά 50%

Albert Einstein